APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK
N°1 GENNAIO 2010

T E M I

ARGOMENTI DI INDISPENSABILITÀ IN FILOSOFIA DELLA MATEMATICA

di Andrea Sereni

ABSTRACT - *Supponiamo che vi siano teorie scientifiche vere, o comunque ben confermate, e che certe teorie matematiche risultino indispensabili, in qualche modo da specificare, per queste teorie scientifiche. Se assumiamo che queste teorie scientifiche possano essere vere (o confermate) solo a condizione che siano vere (o confermate) le teorie matematiche cui esse ricorrono in maniera indispensabile, dobbiamo concludere che anche queste ultime sono vere, o almeno confermate. Se inoltre crediamo che le teorie matematiche in questione parlino di un dominio di oggetti, e che possano essere vere (o confermate) solo a condizione che questi oggetti esistano (o che sia giustificato ritenere che esistano), dobbiamo concludere che questi oggetti esistono (o che è giustificato ritenere che esistano). Questa è l'idea fondamentale alla base dell'argomento di indispensabilità, inizialmente suggerito da Quine e Putnam, e attualmente oggetto di un vasto dibattito. L'argomento, apparentemente semplice, si basa in realtà su una serie di assunzioni discutibili, e fa appello a nozioni controverse. Anche per questo, diverse sue versioni possono essere formulate e discusse.*

1. Introduzione. L'Argomento di Indispensabilità e il dibattito platonismo/nominalismo

Uno dei problemi più dibattuti in filosofia della matematica riguarda l'esistenza e la natura degli oggetti matematici (numeri, insiemi, funzioni, gruppi, ecc.) su cui le nostre teorie matematiche sembrano vertere. Salvo in alcuni casi (per es. Mill [1843], Maddy [1990a, b]), c'è consenso sul fatto che, se esistono, gli oggetti matematici sono oggetti astratti, cioè oggetti privi di collocazione spazio-temporale e privi di efficacia causale (sulla nozione di oggetto astratto, cfr. Hale [1987], Dummett [1973, cap. 14]). Il *platonismo* matematico (il nome rimanda per analogia a posizioni sostenute da Platone) è la tesi secondo cui esistono oggetti matematici astratti, su cui le teorie matematiche vertono. Il *nominalismo* matematico è la tesi secondo cui non esistono oggetti matematici astratti. Il nominalista sosterrà o che gli oggetti matematici sono in realtà oggetti concreti, oppure che non esistono oggetti matematici. Solitamente un nominalista ammetterà solamente l'esistenza di oggetti concreti (spazio-temporalmente collocati e/o dotati di efficacia causale), anche se è possibile essere nominalisti sugli oggetti matematici e ritenere che esistano oggetti astratti diversi dagli oggetti matematici. Di quali tipi di oggetti il nominalista ammette l'esistenza dipenderà dalla specifica versione di nominalismo adottata.

Il platonista fronteggia un difficile dilemma (Benacerraf [1973]): è in grado di rendere conto in maniera intuitiva del significato di asserti matematici, ma deve spiegare come sia affatto possibile per gli esseri umani avere conoscenza di oggetti astratti (il cosiddetto *problema dell'accesso*, che il nominalista ritiene ragione principale della propria posizione). Anche per aggirare questo problema, gli argomenti per il platonismo sono spesso costretti a partire da premesse che il nominalista trova discutibili tanto quanto la stessa tesi platonista. L'argomento di indispensabilità (d'ora in poi AI) è considerato uno dei più efficaci a disposizione del platonista proprio perché si basa su premesse che sembrano perfettamente accettabili per il nominalista e indipendenti dalla considerazione della natura degli oggetti matematici, quali la semplice constatazione che le teorie matematiche sono comunemente impiegate nelle nostre teorie scientifiche.[1] Se non si può fare a meno di impiegare tali teorie matematiche in teorie scientifiche che riteniamo siano vere, o quantomeno confermate dall'evidenza empirica, allora – prosegue l'argomento – non possiamo non ritenere vere, o quantomeno confermate, anche le teorie matematiche in questione, e quindi – sotto opportune condizioni – non ritenere che esistano gli oggetti di cui esse trattano. Dietro a questo semplice ragionamento si nasconde una serie complessa di assunzioni, ciascuna delle quali può essere separatamente messa in dubbio, non solo da un nominalista[2].

Quella che segue è una panoramica necessariamente parziale su un argomento che recentemente è stato oggetto di un vasto e acceso dibattito. Il suo interesse sta principalmente nel fatto che esso coinvolge tesi di ambiti diversi come l'epistemologia, l'ontologia, la filosofia della matematica, della scienza, e del linguaggio. Il modo in cui queste tesi vengono discusse nel tentativo di difendere o di criticare le premesse e la conclusione di AI riflette gran parte della dialettica tra platonisti e nominalisti in filosofia della matematica.

[1] Una teoria (scientifica o matematica) è qui intesa come la chiusura deduttiva di un insieme di assiomi, cioè l'insieme degli assiomi e di tutti i teoremi – eventualmente infiniti – che da essi seguono date opportune regole deduttive

[2] Si rimanda ai Capitoli VI-VII di Panza e Sereni [2009] per dettagli e riferimenti qui omessi per ragioni di spazio.

2. ALCUNE VERSIONI DELL'ARGOMENTO

2.1. L'argomento Quine/Putnam

AI si trova suggerito in diverse osservazioni di Willard Van Orman Quine, anche se una sua prima formulazione esplicita si deve a Hilary Putnam [1971, p. 347] – per questo l'argomento va spesso sotto il nome di *Argomento Quine/Putnam di Indispensabilità*:

[1] [...] quantification over mathematical entities is indispensable for science [...]; therefore we should accept such quantification; but this commits us to accepting the existence of the mathematical entities in question.[3]

Possiamo precisare l'argomento [1] come segue: l'indispensabilità di una teoria matematica M per la formulazione di una teoria scientifica T vera (o confermata) è condizione sufficiente per la verità di M; in M vi sono opportuni asserti quantificati tali che è una condizione necessaria per la loro verità che le variabili vincolate che occorrono in essi prendano oggetti matematici come valori; ne segue che è una condizione necessaria per la verità di T che esistano gli oggetti matematici su cui tali asserti quantificano.

2.2. L'argomento di Colyvan

Vi sono tuttavia molte versioni diverse di AI nel dibattito (si vedano per esempio, oltre a Colyvan [2001, cap. I], Maddy [1992], Resnik [1995], Vineberg [1996], Melia [2000], Chihara [2004, § 5.6], Dieveney [2007], Liggins [2007], Baker [2009]). Tra tutte, quella offerta da Mark Colyvan [1998, p. 40; 2001, p.11] è una delle più discusse:

[3] "[...] la quantificazione su entità matematiche è indispensabile per la scienza [...]; quindi dobbiamo accettare tale quantificazione; ma questo ci impone l'accettazione dell'esistenza delle entità matematiche in questione".

i) We ought to have ontological commitment to all and only the entities that are indispensable to our best scientific theories;

ii) Mathematical entities are indispensable to our best scientific theories;

[2] ------------------------------

iii) We ought to have ontological commitment to mathematical entities.[4]

La premessa (2.*ii*) corrisponde, nel linguaggio di Colyvan, a quanto si dice nella prima frase di [1]. La premessa (2.*i*) ha la forma di un bicondizionale quantificato universalmente: ‘Per ogni entità *x*, dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso *x* se e solo se *x* è indispensabile per le nostre migliori teorie scientifiche’. L’implicazione espressa da ‘solo se’ (la condizione necessaria secondo cui dovremmo ritenerci impegnati all’esistenza di *x* solo se *x* è indispensabile per le nostre migliori teorie scientifiche), è espressa dall’aggettivo ‘sole’ in (2.*i*). L’implicazione espressa da ‘se’ (ovvero la condizione sufficiente secondo cui, se *x* è indispensabile per le nostre migliori teorie scientifiche, allora dovremmo ritenerci impegnati all’esistenza di *x*), è espressa dall’aggettivo ‘tutte’ in (2.*i*). Come vedremo, l’argomento [2] si basa in realtà su una serie di assunzioni ulteriori rispetto a [1] che secondo Colyvan (e molti altri) sono richieste per giustificare la premessa (2.*i*).

[4] i) Dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso tutte e sole quelle entità che sono indispensabili per le nostre migliori teorie scientifiche; ii) Le entità matematiche sono indispensabili per le nostre teorie scientifiche migliori; iii) Dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso entità matematiche.

2.3. Un argomento minimale di indispensabilità

Vista la varietà di formulazioni presenti nel dibattito, è importante avere a disposizione una versione di AI che ne espliciti le assunzioni essenziali. Quello che segue è uno schema di argomenti di questo tipo (con istanze diverse a seconda di specifiche teorie T e M):

i) Vi sono teorie scientifiche vere [T è una teoria scientifica vera];

ii) Fra queste, alcune sono tali da ricorrere a delle teorie matematiche in modo indispensabile [T ricorre a M in modo indispensabile];

iii) Queste teorie scientifiche sono vere solo se lo sono tali teorie matematiche [T è vera solo se lo è M];

iv) Una teoria matematica è vera solo se esistono i suoi oggetti matematici [M è vera solo se esistono gli oggetti di M];

[3] ------------------------------

v) Esistono gli oggetti delle teorie matematiche menzionate in (*ii*) e (*iii*) [gli oggetti di M esistono]

In [3] non si usano nozioni epistemiche quale quella di giustificazione (come in [2]) o di conferma (intendiamo qui la conferma come il grado di fiducia che l'evidenza empirica conferisce nel credere vera una determinata ipotesi), ma si considerano direttamente la verità di teorie e l'esistenza di oggetti. È però facile darne una versione epistemica, formulata nei termini della nostra giustificazione a ritenere vere certe teorie e esistenti certi oggetti. Si noti che se da [3] (o dalla sua versione epistemica) si elimina la premessa [3.*iv*] si ottiene un argomento altrettanto valido, la cui conclusione è 'Le teorie matematiche menzionate in (*ii*) e (*iii*) sono vere' (o 'Siamo giustificati a ritenere vere le teorie matematiche menzionate in (*ii*) e (*iii*))'. In questo caso, i due argomenti che si ottengono (uno epistemico e uno no) non sono a favore del platonismo (o realismo ontologico), ma di quello che viene talvolta chiamato *realismo semantico*: la tesi che le teorie matematiche sono vere (senza che si specifichi che cosa le rende vere, in particolare se per la loro verità sia necessario assumere l'esistenza di determinati oggetti).[5] Alcuni autori (per es. Hellman [1989], o Putnam [1967, 2004]) che ritengono che la verità delle teorie matematiche non dipenda dall'esistenza di oggetti matematici accetterebbero AI solo per il realismo semantico.

Da quanto detto, emerge quindi che si possono dare quattro formulazioni diverse di AI nella sua versione minimale (cfr. Panza, Sereni [2009], cap. VI), due per il platonismo e due per il realismo semantico, delle quali rispettivamente una epistemica e una non epistemica.

3. Nozioni e assunzioni essenziali: il dibattito

Per giustificare le premesse degli argomenti [1]-[3] è necessario comprendere cosa si intende per *indispensabilità* quando si dice che una teoria matematica è indispensabile per una teoria scientifica, e in che senso la quantificazione su determinati oggetti può essere impiegata per definire un appropriato *criterio di impegno ontologico* per teorie (Quine [1948]). La premessa (3.*i*) richiede che si adotti una qualche posizione di *realismo scientifico*. Inoltre, Colyvan, come molti sostenitori e critici di AI, ritiene che per giustificare la premessa (2.*i*) – o il suo equivalente in altre versioni di AI – si debbano accettare altre dottrine qui-

[5] Questa nozione di realismo differisce da quella introdotta da Micheal Dummett (per esempio in Dummett [1978]) secondo la quale il realismo su un particolare dominio di asserti è la tesi che tali asserti posseggono un valore di verità determinato (vero o falso) indipendentemente dalla nostra capacità di stabilire quale. Il realismo (semantico) come inteso spesso nel dibattito che consideriamo, è una tesi sulla verità di certi asserti o teorie, non sul loro valore di verità.

neane, l'*olismo della conferma* e *il naturalismo*. Vediamo più precisamente in cosa consistono queste nozioni e queste dottrine, e come è possibile rigettare AI o rigettando queste ultime, o criticando il criterio di Quine, o ancora sostenendo che non vi sono teorie matematiche indispensabili per teorie scientifiche.

3.1. Indispensabilità

Che cosa significa che una teoria matematica M è indispensabile per una teoria scientifica T? Supponiamo di poter distinguere, tra gli asserti di T, quelli formulati utilizzando anche il vocabolario di M, e quelli che invece non ne fanno uso, e che saranno quindi detti 'asserti nominalisti'. Chiamiamo il secondo corpo di asserti N. Dire che M è indispensabile per T significa sostenere che non è possibile trovare una teoria T* che sia equivalente a T e che non impieghi il vocabolario di M. Come dobbiamo intendere però l'equivalenza tra T e T*? Si può richiedere per esempio che gli asserti di T* debbano essere una parafrasi degli asserti di T – quindi debbano avere lo stesso significato, o almeno le stesse condizioni di verità. Oppure che T e T* debbano consentire di trarre le stesse conseguenze per la realtà concreta, cioè, come si usa dire, che siano empiricamente equivalenti. Oppure si può ritenere che T e T* debbano avere la stessa capacità esplicativa. La strategia della parafrasi è suggerita in molti lavori di Quine (a partire da Quine [1939]), quella dell'equivalenza empirica è quella maggiormente adottata (per es. Field [1980], Colyvan [2001]), mentre quella dell'equivalenza esplicativa (suggerita dallo stesso Field [1980; 1989, pp. 14-20) è stata adottata da Allan Baker [2005] e [2009], e si collega all'intenso dibattito sulla nozione di spiegazione matematica (cfr. Mancosu [2008]).

La critica principale all'idea che la matematica sia indispensabile alla scienza è stata mossa da Hartry Field. Field [1980] ritiene che la ragione principale addotta per sostenere che una teoria matematica sia vera è la sua applicabilità e utilità nelle scienze empiriche, ma che sia invece possibile spiegare applicabilità e utilità di una teoria matematica anche se essa non è vera, supponendo solo che essa sia *conservativa* (cioè che dato un corpo consistente di asserti nominalistici N e una teoria matematica M, un asserto formulato nel solo vocabolario di N è una conseguenza di N+M solo se è una conseguenza della sola N). Il solo ruolo della matematica è quello di semplificare deduzioni che si potrebbero comunque condurre anche senza di essa. Perché l'argomento di Field sia efficace, è necessario che una teoria scientifica possa essere innanzitutto riscritta in termini puramente nominalisti. Field suggerisce come farlo per la teoria newtoniana della gravitazione, e suppone che la sua strategia si possa replicare per qualunque teoria scientifica. Questa proposta è stata variamente criticata (per es. Malament [1982], Shapiro [1983], Burgess e Rosen [1997], Melia [1998], [2006], Colyvan [2001, cap. 4], Hale, Wright [2002]), ma è sicuramente la più sviluppata contro l'indispensabilità della matematica.

3.2. Il criterio di impegno ontologico di Quine

Informalmente, l'impegno ontologico di una teoria è dato dalle entità che devono esistere affinché la teoria sia vera. Il criterio suggerito da Quine [1948] stabilisce che l'impegno ontologico di una teoria è dato dai valori che le variabili vincolate dai quantificatori esistenziali nei teoremi esistenziali (cioè nei teoremi della forma '└$x[A(x)]$', dove Ax è una formula aperta in x) di una teoria devono prendere affinché la teoria sia vera, una volta che: i) la teoria sia stata formulata in un linguaggio predicativo del primo ordine (con identità);

e ii) gli asserti della teoria siano stati formulati in un vocabolario che si ritiene ontologicamente minimale (cioè impegnato al minor numero di entità, o di tipi di entità, o a entità la cui esistenza non si ritiene problematica).

Affinché il criterio di Quine possa servire a rispondere alla domanda ‘Che cosa esiste?’ (data una teoria vera a cui applicarlo), è necessario sostenere: a) che vi sia un solo senso in cui si può parlare di esistenza; e b) che il quantificatore esistenziale del primo livello (‘└*x*’) colga esaurientemente il significato del verbo ‘esistere’ (cioè che in ogni caso asserti informali del tipo ‘Esiste un F tale che...’ o ‘Ci sono F tali che...’ possano e debbano essere resi con formule del tipo ‘└$x[A(x)]$’.

Ci sono numerose strade per rigettare AI criticando il criterio di Quine, sia direttamente, sia rigettandone i presupposti. Si può rigettare il presupposto (a), come suggerito dalla distinzione di Rudolf Carnap [1950] tra un senso di esistenza interno e uno esterno a una teoria (o a un *framework* linguistico). Si può rigettare (b), come suggerito dalla teoria delle descrizioni equivalenti di Putnam [1967, 2004]. Oppure si può criticare in modi diversi il criterio stesso: assumendo una posizione finzionalista (come in Yablo [1998, 2001, 2005] o in Balaguer [1998, 2009]) secondo la quale anche se una teoria quantifica su oggetti matematici, tali oggetti devono essere intesi come semplici finzioni[6]; sostenendo per varie ragioni che sia legittimo, anche senza adottare una posizione finzionalista, non ritenersi impegnati agli oggetti matematici su cui quantifica una teoria (Eklund [2005], Hofweber [2005, 2007], Melia [1995, 2000]); proponendo opportuni criteri alternativi a quello di Quine (Azzouni [1997, 1998, 2004]).

[6] Anche Field [1980; 1989, Introduzione] adotta una posizione finzionalista, ma tale posizione non è da intendersi come una critica al criterio di Quine.

3.3 Realismo scientifico

Stathis Psillos [1999, p. xix] definisce il realismo scientifico come la tesi secondo cui le nostre teorie scientifiche intendono descrivere letteralmente il mondo in quanto esistente e determinato indipendentemente dalle nostre attività cognitive, che esse sono passibili di essere considerate come vere o false, e che in particolare si devono considerare le teorie scientifiche che sono dotate di un buon potere esplicativo e predittivo di fenomeni empirici come (almeno approssimativamente) vere, e le entità di cui esse postulano l'esistenza come di fatto esistenti. Ciascuno di questi aspetti può essere criticato. Per giustificare la premessa (3.*i*), è necessario sostenere almeno che vi possano essere teorie scientifiche vere. Questo può essere negato, fra l'altro, negando che le teorie scientifiche descrivano letteralmente il mondo, e che esse possano essere valutate in termini di verità e falsità. Si può per esempio sostenere che in tali teorie vi siano parti – in particolare quelle che vertono su entità non osservabili, dai neutrini fino agli oggetti matematici – che devono essere considerate solamente strumenti per derivare quelle parti della teoria che descrivono esclusivamente fenomeni empirici, e che non siano dunque da ritenersi vere (una posizione simile è quella di Bas Van Fraassen [1980]).

3.4. Olismo della conferma

L'olismo della conferma è una tesi (già suggerita da Pierre Duhem [1906]) a proposito del modo in cui l'evidenza empirica conferma (ovvero aumenta la nostra fiducia nella verità di) una teoria scientifica. Con le parole di Quine [1951, p. 59], la tesi è che "our statements about the external world face the tribunal of experience not individually but as a corporate body".[7] Supponiamo di testare sperimentalmente una certa ipotesi *H* di una teoria T (per esempio l'ipotesi della chimica che un certo materiale ha composizione chimica così-e-così, cfr. Quine [1992, p. 9-16]). Supponiamo che un test sperimentale confermi l'ipotesi *H*. Secondo l'olista, il test conferma *H* non in isolamento, ma assieme a un corpo molto più ampio di ipotesi (tutte quelle che costituiscono la teoria T, così come quelle che riguardano l'affidabilità delle nostre capacità cognitive e degli apparati strumentali utilizzati, ecc.). Se T impiega indispensabilmente (cioè contiene come sua parte gli assiomi e i teoremi di) una teoria matematica M, allora l'esperimento conferma anche M (e, assumendo un qualche criterio di impegno ontologico, conferma la credenza nell'esistenza degli oggetti di M).

Secondo Colyvan, l'olismo della conferma serve per giustificare la direzione espressa dal 'tutte' nella premessa (2.*i*). Esso fornirebbe dunque condizioni necessarie per l'esistenza di oggetti matematici (o per la verità di teorie matematiche, in una ipotetica versione semantica di [2]). È inoltre possibile criticare AI sostenendo che la conferma empirica non funziona in maniera olistica, e in particolare non è in grado di estendersi alle parti matematiche delle teorie scientifiche (Sober [1995], Vineberg [1996]). In molti hanno comunque fatto notare che è possibile formulare AI anche senza l'olismo (Resnik [1995], Chihara [2004, § 5.6], Dieveney [2007]), come d'altronde mostra anche l'argomento [2].

[7] "Le nostre asserzioni sul mondo esterno affrontano il tribunale dell'esperienza sensibile non individualmente, ma soltanto come un corpo unico". Questa tesi va qui tenuta distinta dalla tesi quineana dell'olismo del significato (secondo cui il significato di un asserto è determinato dalle sue relazioni con tutti gli altri asserti del linguaggio cui appartiene). Si noti che il cosiddetto modello ipotetico-deduttivo della conferma adottato da Quine nel sostenere l'olismo è stato sottoposto a pesanti critiche (su cui si vedano Glymour [1980], Earman e Salmon [1999]).

3.5 Naturalismo

In uno slogan (Quine [1981, p. 72]), il naturalismo consiste nell'abbandono dell'idea che vi sia una "filosofia prima", un punto di vista esterno e superiore all'impresa scientifica da cui giudicarla e giustificarla. Il dibattito sul naturalismo è ampissimo (si veda per una panoramica introduttiva Papineau [2007]). Qui possiamo intenderlo come la tesi secondo cui siamo giustificati ad accettare la verità solo di quelle teorie alle quali ricorrono (indispensabilmente) teorie scientifiche vere o confermate (versione semantica), e l'esistenza solo di quegli oggetti che sono nell'impegno ontologico di tali teorie (versione ontologica).

Secondo Colyvan, il naturalismo serve per giustificare la direzione espressa dal 'sole' nella premessa (2.*i*). Esso fornirebbe condizioni necessarie per l'esistenza di oggetti matematici (o per la verità di teorie matematiche, in una ipotetica versione semantica di [2]). Una conseguenza di formulare AI con il naturalismo è che non avremmo nessuna giustificazione per ritenere vere tutte quelle teorie matematiche che non trovano applicazione in teorie scientifiche, né esistenti gli oggetti di cui trattano (Quine [1986, p. 400], Quine [1995, pp. 56-57]), e per questo l'argomento è stato duramente criticato (Maddy [1995]). Si noti comunque che in [2] non vi è alcun appello al naturalismo (inoltre il naturalismo è una tesi più forte del realismo scientifico: il primo implica il secondo, ma non viceversa). Per quanto riguarda le tesi dell'olismo e del naturalismo, possiamo dire che se anche Quine aveva ragioni indipendenti per sostenere entrambe, e se anche dall'assunzione di entrambe segue facilmente una versione di AI, è perfettamente legittimo ritenere che esse non siano premesse indispensabili dell'argomento.

BIBLIOGRAFIA

Azzouni J. (1997), “Applied Mathematics, Existential Commitment and the Quine-Putnam Indispensability Thesis”, *Philosophia Mathematica, serie III*, 5, pp. 193–209.

Azzouni J. (1998), “On “On what there is””, *Pacific Philosophical Quarterly*, 79, 1, pp. 1-18.

Azzouni J., (2004), *Deflating Existential Consequence. A Case for Nominalism*, Oxfo rd University Press, Oxford.

Baker A. (2005), “Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?”, *Mind*, 114, 454, pp. 223-238.

Baker A. (2009), “Mathematical Explanation in Science”, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 60, pp. 611-633.

Balaguer M. (1998), *Platonism and Anti-Platonism in the Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Balaguer M. (2009), “Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics”, *Philosophia Mathematica*, III, 17, pp. 131-162.

Benacerraf P. (1973), “Mathematical Truth”, *Journal of Philosophy*, 70, pp. 661-680, anche in Benacerraf e Putnam (1983), pp. 403-420.

Benacerraf P., Putnam H. (1964), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.); seconda edizione (1983), Cambridge University Press, Cambridge.

Burgess J., Rosen G. (1997), *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Carnap R. (1950). “Empiricism, semantics, and ontology”, *Revue International de Philosophie*. 4, pp. 20–40; ristampato con modifiche in *Meaning and Necessity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1956, pp. 205-21. Questa seconda versione si trova anche in Benacerraf e Putnam (1964), pp. 241-257 (edizione del 1983). Tr. it. “*Empirismo, semantica e ontologia”*, in Carnap, R. *Significato e necessità*, La Nuova Italia, Firenze, 1976, pp. 325-350, anche in Linsky L., *Semantica e filosofia del linguaggio*, Il Saggiatore, Milano, 1969, anche in Iacona A., Paganini E. (a cura di), *Filosofia del linguaggio*, Raffaello Cortina Editore, Milano 2003, pp. 87-105.

Colyvan M. (1998), “In Defence of Indispensability”, *Philosophia Mathematica*, serie III, 6, 1, pp. 39-62.

Colyvan M. (2001), *The Indispensability of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Dieveney P. (2007), “Dispensability in the Indispensability Argument”, *Synthese*, 157, 1, pp. 105-128.

Duhem P. (1906), *La theorie physique. Son object, sa structure*, Chevalier & Rivière, Paris; 12ima edizione rivista, Marcel Riviere et C.ie, 1914. Tr. it. in Duhem P., *La teoria fisica*, Bologna, Il Mulino 1978.

Dummett M. (1973), (1981^2), *Frege: Philosophy of Language*, Londra, Duckworth. Tr. it. *Filosofia del linguaggio: saggio su Frege*, Marietti, Casale Monferrato, 1983.

Dummett M. (1978), “Realism”, in Dummett M., *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London, pp. 145-165. Tr. it. in Dummett M., *Verità e altri enigmi*, Il Saggiatore, Milano, 1989.

Earman J., Salmon W. (1999), “The Confirmation of Scientific Hypothesis”, in Salmon H. M. (a cura di) *Introduction to the Philosophy of Science*, Hackett Publishing Co., prima edizione 1992, Cap. 2.

Eklund M. (2005), “*Fiction, Indifference, and Ontology*”, *Philosophy and Phenomenological Research*, 71, pp. 557-79.

van Fraassen B. (1980), *The Scientific Image*. Oxford University Press, Oxford, New York. Tr. it. *L’immagine scientifica*, CLUEB, Bologna, 1985.

Glymour C. (1980), *Theory and Evidence*, Princeton University Press, Princeton.

Hale B. (1987), *Abstract Objects*, Blackwell, Oxford.

Hale B., Wright C. (1992) “Nominalism and the contingency of abstract objects”, *Journal of Philosophy*, 89, pp. 111-135.

Hofweber T. (2005), “Number Determiners, Numbers, and Arithmetic”, *The Philosophical Review*, 114, 2, pp. 179-225.

Hofweber T. (2007), “Innocent Statements and Their Metaphysically Loaded Counterparts”, *The Philosophers’ Imprint*, 7, 1, pp. 1-33.

Liggins, D. (2007), “Quine, Putnam, and the 'Quine-Putnam' indispensability argument”, *Erkenntnis*, 68, 1, pp. 113-27.

Maddy P. (1990a), *Realism in Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

Maddy P. (1990b), “Physicalistic platonism”, in A. Irvine, (a cura di), *Physicalism in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 259-289, ristampato in Resnik M. (a cura di), *Mathematical Objects and Mathematical Knowledge*, in International Research Library of Philosophy, J. Skorupski, (a cura di), Dartmouth Publishing Company, 1995.

Maddy P. (1992), “Indispensability and practice”, *The Journal of Philosophy*, 89, 6, pp. 275-289.

Malament D. (1982), Review of Field's *Science Without Numbers*, *Journal of Philosophy*, 79, pp. 523-534.

Mancosu P. (2008b), “Mathematical Explanation: Why it Matters”, in P. Mancosu (a cura di), 2008, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford: Oxford University Press.

Melia J. (1995), “On What There's Not”, *Analysis*, 55, 4, pp. 223-229.

Melia J. (1998), “Field’s Programme: Some Interferences”, *Analysis*, 58, 2, pp. 63-71.

Melia J. (2000), “Weaseling away the indispensability argument”, *Mind*, 109, pp. 455-479.

Melia J. (2006), “The conservativeness of mathematics”, *Analysis*, 66, pp. 202-208.

Mill J. S. (1843) *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*, Longmans, London. Tr. it. *Sistemi di logica deduttiva e induttiva*, UTET, Torino, 1996.

Quine W. V. O. (1939), “Designation and Existence”, *Journal of Philosophy*, 36, 26, pp. 701-709, reprinted in Feigl H., Sellars, W. (a cura di), *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, Inc, New York, 1949.

Quine W. V. O. (1948), “On What There Is”, *Review of Metaphisics*, 2, pp. 21-38, anche in Quine (1953), cap. I.

Quine W. V. O. (1951a), “Two dogmas of empiricism”, *Philosophical Review*, 60, 1, pp. 20-43, anche in Quine (1953), cap. II.

Quine W. V. O. (1953), *From a Logical Point of View*, Harper & Row, New York, seconda edizione 1961, Tr. it. *Da un punto di vista logico*, Raffaello Cortina Editore, Milano 2004.

Quine W. V. O. (1981), “Five Milestones of Empiricism”, in Quine, W. V. O., *Theories and Things*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1981, pp. 67-72.

Quine W. V. O. (1986), “Reply to Charles Parsons”, in Hahn L., Schilpp P. (a cura di), *The Philosophy of W.V. Quine*, Open Court, La Salle (Ill), pp. 396-403.

Quine W. V. O. (1995), *From Stimulus to Science*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), Tr. it. *Dallo stimolo alla scienza*, Il Saggiatore, Milano, 2001.

Panza M., Sereni A. (2009), *Il problema di Platone. Una storia della filosofia della matematica e un’introduzione al dibattito contemporaneo*, Carocci, Roma, 2009.

Papineau D. (2007), “Naturalism”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (a cura di), URL =
<http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/naturalism/>.

Psillos S. (1999), *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*, Routledge, London, 1999.

Putnam, H., (1967), “Mathematics without foundations”, *The Journal of Philosophy*, 64, 5-22, ristampato in Putnam (1975), pp. 43-59.

Putnam, H. (1971), *Philosophy of logic*, Harper & Row, New York, anche in Putnam (1975), cap. 20 (non presente nella trad. it di Putnam, 1975), trad. it. Filosofia della logica : nominalismo e realismo nella logica contemporanea, ISEDI, Milano, 1975..

Putnam H. (1967), “Mathematics without foundations”, *The Journal of Philosophy*, 64. 1, pp. 5-22, anche in Putnam (1975), cap. 3, e in Benacerraf, Putnam (1963), pp. 295-311 (edizione del 1983).

Putnam H. (1975), *Mathematics Matter and Method: Philosophical Papers Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, seconda edizione 1985. Tr. it. *Matematica, Materia e Metodo*, Adelphi, Milano, 1993.

Putnam H. (2004), *Ethics Without Ontology*, Harvard University Press, Cambridge (Ma.). Tr. it. *Etica senza ontologia*, Bruno Mondadori, Milano, 2005.

Resnik M. D. (1995), “Scientific Vs Mathematical Realism: The Indispensability Argument”, *Philosophia Mathematica, serie III*, 3, 2, pp. 166-174.

Vineberg S. (1996), "Confirmation and the Indispensability of Mathematics to Science", *Philosophy of Science*, Supplement to vol. 63, pp. 256-263.

Shapiro S. (1983), “Conservativeness and Incompleteness”, *Journal of Philosophy*, 80, 9, pp. 521-31.

Yablo S. (1998), “Does Ontology Rest On a Mistake?”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, Supp. Vol. 72, pp. 229-261.

Yablo S. (2001) “Go Figure: A Path Through Fictionalism”, *Midwest Studies in Philosophy*, XXV, 72.

Yablo S. (2005), “The Myth of the Seven”, in Kalderon (2005), pp. 88-115.

ALTRE RISORSE ONLINE

Colyvan M. (2008), "Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (a cura di), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/mathphil-indis/>.