APhEx 7, 2013 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 04/11/2012
Accettato il: 16/01/2013
Redattore: Valeria Giardino

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

N°7 GENNAIO 2013

–

PROFILI

KURT GÖDEL

di Riccardo Bruni

ABSTRACT - *Kurt Gödel (1906-1978) è stato certamente il logico più influente del '900. A lui si devono alcuni dei risultati più noti nel campo delle ricerche fondazionali, come il teorema di completezza semantica per il calcolo logico del prim'ordine, i due teoremi di incompletezza, la dimostrazione di consistenza dell'ipotesi del continuo di Cantor con gli assiomi della teoria degli insiemi. Egli è noto anche per alcune prese di posizione di tipo filosofico molto discusse, come l'approccio di tipo platonista al problema relativo all'esistenza e alla natura degli enti matematici. La complessa personalità di Gödel, insieme alla sua straordinaria produzione scientifica, lo hanno portato ad acquisire una fama che va ben oltre i confini della disciplina.*

1. Cenni su vita e opere

Nato a Brünn (all'epoca città tedesca, che prenderà il nome di Brno dopo la prima guerra mondiale) il 28 aprile 1906, da famiglia benestante, Kurt Gödel ottiene il diploma di scuola superiore nel 1924. Per proseguire gli studi si trasferisce a Vienna dove, durante il primo periodo di formazione universitaria, compie incontri destinati a lasciare un segno profondo nella sua attività scientifica. Grazie ad uno dei suoi docenti, il matematico Hans Hahn, e a Karl Menger, uno dei migliori studenti di Hahn e professore associato all'Università di Vienna, Gödel entra in contatto con i componenti di quello che diverrà noto come il Circolo di Vienna. Lungi dall'essere influenzato dalle idee prevalenti del Circolo, Gödel finirà per sviluppare precocemente una posizione filosofica ben delineata e per gran parte in opposizione al positivismo logico. Come si avrà modo di approfondire nel seguito, quest'aspetto si rivelerà tutt'altro che marginale per una parte considerevole dell'opera gödeliana.

Furono le lezioni di logica di Carnap e la pubblicazione del volume Hilbert e Ackermann [1928] a dirigere l'interesse di Gödel verso la logica matematica. Questo interesse si concretizzerà con la tesi di dottorato del 1929 che contiene il suo primo, notevole contributo: la dimostrazione del teorema di completezza semantica per il calcolo predicativo classico del prim'ordine. Nel decennio successivo, quello dal 1929 al 1939, si colloca la gran parte di quei risultati ai quali Gödel deve la sua fama. Gli anni seguenti sono segnati dal trasferimento negli Stati Uniti, all'*Institute for Advanced*

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

Studies di Princeton, dove Gödel era già stato in visita in precedenza e dove rimarrà fino alla morte nel 1978.

Il trasferimento di Gödel, motivato dall'ascesa del Partito Nazista in patria, coinciderà con una fase in cui gli interessi scientifici diventeranno più vari, lasciando spazio alla riflessione più dichiaratamente filosofica e ai contributi alla teoria della relatività stimolati dalla frequentazione di Einstein, anch'egli ospite dell'Istituto di Princeton. Sull'attività scientifica di Gödel in questa fase della sua vita, graverà pesantemente la crescente destabilizzazione fisica e psicologica dovuta ad una serie di crolli nervosi, già manifestatisi nel corso degli anni '30, che lo porteranno a sviluppare quelle fobie responsabili della morte per consunzione il 14 gennaio 1978[1].

La recezione dell'opera di Gödel è stata segnata negli ultimi anni dal progetto editoriale dei *Collected Works* che, al di là dei contributi effettivamente pubblicati da Gödel racchiusi nei primi due volumi delle opere complete - Feferman et al. [1986] e [1990] -, ha messo a disposizione degli studiosi carteggi, opere inedite e testi di conferenze[2]. Alle fonti dirette, si sono aggiunte nel corso degli anni le testimonianze di Hao Wang, in Wang [1974], [1987] e [1996], che ha potuto utilizzare le informazioni da lui raccolte durante incontri e scambi epistolari con Gödel per offrire una propria ricostruzione del pensiero gödeliano.

Se da un lato l'ampliamento delle fonti permette di apprezzare la complessità e la profondità della figura di Gödel, dall'altro ciò mette anche di fronte alla necessità di

1 Si rimanda alla lettura di Feferman [1986] per maggiori dettagli sulla biografia di Gödel.

2 I cinque volumi delle opere di Gödel hanno avuto anche una traduzione italiana, presso Boringhieri, a partire dal 1999. Onde evitare un'eccessiva complicazione nei rimandi bibliografici, tuttavia, si è scelto di fare riferimento all'edizione inglese nel corso del presente contributo.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

stabilire con chiarezza l'affidabilità dei testi al fine di evitare clamorosi errori di valutazione. Com'è ovvio, questo riguarda in primo luogo il materiale inedito, che è anche quello più ricco di spunti per l'elaborazione degli aspetti più filosoficamente pregnanti dell'opera di Gödel.

Data la profondità dei risultati che la caratterizzano, cercare di dominare l'opera di Gödel in poche pagine è impresa pressoché impossibile. Al di là dell'inevitabile selezione di testi e temi trattati, l'analisi dell'opera gödeliana è stata suddivisa in tre parti. La prima si riferisce ai due principali risultati ottenuti da Gödel in campo logico. La seconda parte è dedicata invece alla dimostrazione di consistenza dell'ipotesi del continuo di Cantor con gli assiomi della teoria degli insiemi. Infine, l'ultimo paragrafo affronta la questione legata al platonismo e alla riflessione filosofica di marca gödeliana.

2. I contributi logici di Gödel

2.1 Il teorema di completezza semantica

La tesi di dottorato del 1929 contiene il risultato che rivelò la figura di Gödel alla comunità scientifica. Se il titolo accademico fu conferito nel febbraio del 1930, la tesi risultava completata già dall'estate dell'anno precedente. Il lavoro è noto come il luogo dove si trova la soluzione al problema della completezza semantica del calcolo dei predicati del prim'ordine (a quell'epoca noto come il "calcolo funzionale ristretto"). Le fonti relative a questo tema comprendono, oltre alla tesi di dottorato vera e propria (Gödel [1929]), l'articolo da essa estratto (Gödel [1930]) e, dello stesso anno, il testo dell'intervento (Gödel [1930a]) con il quale il giovane Gödel ebbe modo di presentare il risultato al secondo Convegno sull'Epistemologia e le Scienze Esatte, organizzato a Königsberg nel settembre 1930 dalla *Gesellschaft für empirische Philosophie*.

Così come lo si può trovare oggi descritto nei manuali di logica, il teorema di completezza semantica per il calcolo dei predicati classico del prim'ordine (CPC, per brevità, da qui in avanti) stabilisce che ogni formula universalmente valida risulta essere dimostrabile a partire dagli assiomi del calcolo stesso[3]. La proprietà di essere "universalmente valida" è soddisfatta da una formula che sia vera sotto ogni attribuzione di significato ai termini individuali e predicativi che essa contiene, dunque da una formula che sia vera in ogni modello. Una formula è universalmente valida quindi, se è vera *indipendentemente* dal significato delle sue componenti sintattiche e risulta tale in virtù della sola *forma logica* (ossia se è una *verità logica*). Nel caso non banale, il teorema di Gödel stabilisce allora che ogni verità logica che non sia già tra gli assiomi del CPC è derivabile da essi in un numero finito di passi per applicazione di regole logiche di inferenza. Poiché vale anche il reciproco, ovvero che una formula dimostrabile nel CPC risulta essere valida, ne consegue che la nozione di "dimostrabilità" e "validità (in ogni modello del CPC)" si equivalgono per le formule del CPC.

La metodologia dimostrativa utilizzata da Gödel ha sollevato una questione storiografica alla quale merita fare un cenno. Gödel ricorre infatti a un metodo già usato in Löwenheim [1915] e Skolem [1923] per stabilire l'esistenza, per ogni data formula *F*

3 In realtà, i concetti semantici ai quali oggi si ricorre per spiegare il risultato di Gödel non erano ancora compiutamente sviluppati all'epoca e proprio il lavoro di Gödel, insieme all'opera di Alfred Tarski, ha fornito lo stimolo per le ricerche nel campo di quella che sarebbe divenuta la teoria dei modelli.

del CPC, di una *forma normale* Q*M*, logicamente equivalente a F*,* composta da un prefisso Q con una stringa $U_1, \ldots, U_n$ di quantificatori universali e una stringa $E_1, \ldots, E_m$ di quantificatori esistenziali, e da una matrice *M* priva di quantificatori. Su questa base, Gödel stabilisce, per una qualsiasi formula del linguaggio predicativo del prim'ordine, che se esiste un modello nel quale risulta valida, allora risulta valida in un modello numerabile. In altre parole, la memoria di Gödel, pur non riducendosi a questo, contiene la prova di una particolare istanza del teorema di Löwenheim-Skolem.

I rapporti stretti tra la tesi di Gödel e i lavori di Löwenheim e Skolem hanno fatto sì che si sollevasse il dubbio che il risultato di Gödel non fosse già implicito in quanto dimostrato da questi ultimi. Della questione è possibile trovare traccia nell'epistolario gödeliano, in particolare in due lettere dei primi anni '60 del '900 indirizzate da Gödel a Jean van Heijenoort in occasione della preparazione del testo [1967] curato da quest'ultimo che contiene una riedizione dei lavori "incriminati", e in un'ulteriore lettera diretta ad Hao Wang in risposta ad alcune richieste di chiarificazione da parte di quest'ultimo in vista della la pubblicazione di Wang [1974][4].

Gödel non nasconde la vicinanza di contenuti tra il proprio contributo e quelli dei suoi illustri predecessori. Egli arriva persino a riconoscere come il teorema di completezza semantica sia una "conseguenza banale" dei risultati di Skolem in particolare. Tuttavia, egli sottolinea come ciò non sia stato rilevato né dai due autori in questione, né da nessun altro fino a Gödel. Al di là del fatto che nella dimostrazione di Gödel è possibile riscontrare almeno un passaggio significativo che manca nei lavori precedenti (quello

4 Le lettere di Gödel sono contenute in Feferman et al. [2003].

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

essenziale per ricavare la dimostrabilità in CPC di una formula valida), il nodo della questione è più che altro di natura concettuale. Ciò che mancava a Skolem e a Löwenheim, infatti, era la familiarità con la nozione di dimostrabilità in un sistema formale di assiomi, rispetto alla quale risulta imprescindibile il testo di Hilbert e Ackermann[5].

Il teorema di Löwenheim-Skolem non è comunque l'unico risultato significativo legato alla prova di Gödel. Tra le applicazioni del teorema di completezza semantica, Gödel cita il fatto che un insieme infinito numerabile di formule del CPC risulta avere un modello numerabile se e solo se ogni congiunzione finita di elementi dell'insieme ha un modello[6]. All'epoca questo risultato non attrasse granché l'attenzione della comunità scientifica. Tuttavia, esso avrebbe trovato un largo impiego nella ricerca logica e fondazionale successiva (a partire già dalla seconda metà degli anni '30 del '900) ed è noto oggi agli studiosi (e agli studenti) come il "teorema di compattezza" per il CPC[7].

Di un certo interesse, data la connessione con le tematiche legate al programma fondazionale di marca hilbertiana, sono poi alcune considerazioni di Gödel sui rapporti tra completezza semantica e decidibilità con le quali egli decise di chiudere il proprio intervento alla seconda conferenza sull'epistemologia e le scienze esatte organizzata a Königsberg nel settembre 1930[8].

---

5 Al lettore interessato alla questione, suggerisco la lettura della nota introduttiva a Gödel [1929] in Feferman et al. [1986], pp. 44-59.

6 Si tratta del "Teorema IX" di Gödel [1930], una generalizzazione del risultato indicato come (VII) in Gödel [1929].

7 Al riguardo, si rimanda alla lettura di Dawson [1993].

8 Il testo dell'intervento di Gödel è riprodotto in Feferman et al. [1995]. In particolare, si veda Gödel [1930a], p. 29.

Supponiamo di avere un sistema formale S, i cui assiomi siano formule del CPC, che sia consistente, dunque non contraddittorio, e *categorico*. In generale, si dice che è categorico un sistema formale d'assiomi che possieda modelli a due a due isomorfi, ovvero strutturalmente "simili": in quanto possiedono domini equinumerosi e tali per cui ad ogni funzione o proprietà dell'uno corrisponde una funzione o una proprietà dell'altro. Ciò ha un riflesso al livello della semantica: dati due modelli M_1 e M_2 di un sistema d'assiomi categorico S, per ogni formula *A* del CPC, *A* è valida in M_1 se e solo se è valida in M_2. Dal teorema di completezza semantica, segue che detto S sarebbe di conseguenza sintatticamente completo, ovvero S dimostrerebbe *A* o la sua negazione $\neg A$, per ogni formula *A*. Infatti, se un tale S fosse incompleto, ossia esistesse una data formula *A* del CPC rispetto alla quale S non dimostrasse né *A*, né la sua negazione, allora S non potrebbe essere neanche categorico: poiché S non dimostra $\neg A$, segue che S+*A* (ossia il sistema formale ottenuto congiungendo *A* agli assiomi di S) ha un modello M per il teorema di completezza semantica il quale rende vera *A*; siccome S non dimostra neanche *A*, anche S+$\neg A$ possiede un modello M* che rende vera $\neg A$. S non sarebbe dunque categorico. Dalla contraddizione segue così che la completezza semantica e la categoricità implicano la completezza sintattica, ossia la decidibilità. Se il teorema di completezza semantica di Gödel potesse venire esteso alla logica del secondo ordine, cosiddetta per il fatto che vi si consente la quantificazione su variabili predicative, allora si avrebbe come conseguenza la decidibilità di ogni problema formulabile nel linguaggio dell'analisi, che si sa essere categorica. "Tuttavia, tale estensione del teorema di completezza è impossibile, come ho avuto modo di dimostrare di recente: infatti, esistono problemi matematici che […] non possono essere risolti mediante l'apparato logico dei *Principia Mathematica*". È questo il primo annuncio del risultato che era destinato a cambiare il volto della ricerca logica e fondazionale, e a regalare a Gödel l'enorme fama della quale gode ancora oggi.

2.2 I teoremi di incompletezza sintattica

Supponiamo che S sia un sistema assiomatico formale consistente, capace di esprimere una "modica quantità" di aritmetica. Per semplicità, possiamo supporre che S coincida con il sistema d'assiomi di Peano per l'aritmetica o che sia una sua estensione. Si dimostra che: 1. esiste una formula A del linguaggio di S tale che S non dimostra A, né la refuta (ossia non dimostra neanche $\neg A$); 2. tra gli enunciati siffatti, figura la formula Con(S) che esprime la consistenza di S (dunque, esprime il fatto che dagli assiomi di S non segue una contraddizione).

Il metodo seguito da Gödel per giungere alla propria scoperta, è parte integrante dell'interesse del risultato. Gödel, infatti, introduce una tecnica, divenuta uno standard per la ricerca logica seguente, che consente ad un sistema assiomatico formale di riflettere proprietà sintattiche del linguaggio sul quale esso è basato. La procedura è nota come *aritmetizzazione della sintassi*, e prevede (i) che ai simboli del linguaggio sia assegnato un numero, (ii) che sia fissata una procedura che attribuisca un numero alle espressioni composte del linguaggio in funzione dei numeri assegnati ai simboli che l'espressione contiene. Si dimostra, grazie alle proprietà aritmetiche del sistema scelto, che S è in grado di riflettere a livello dimostrativo alcune proprietà significative, ad

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

esempio la propria capacità dimostrativa, rappresentabile da un predicato del tipo $\mathrm{Teor}_S(x)$ che stia per "x è un teorema del sistema S". Tali proprietà, dunque, diventano "oggetto" dei teoremi del sistema.

Gödel giunge così a costruire un enunciato che, per dirla con un'espressione molto in voga in letteratura, "dice di sé stesso di non essere dimostrabile in S". In effetti, si dimostra che esiste un enunciato G che equivale logicamente alla formula $\neg\mathrm{Teor}_S(G)$ che ne esprime l'indimostrabilità in S. In modo non dissimile da ciò che accade con altri enunciati paradossali a livello informale, si dimostra che G è indecidibile in S.

Gli aspetti rilevanti legati ai due teoremi di incompletezza sintattica di Gödel sono molti. Con l'aiuto del materiale inedito e della corrispondenza, è possibile gettare una luce nuova su alcuni di essi.

In primo luogo, c'è la questione del percorso euristico che ha condotto Gödel alla sua dimostrazione. Una parafrasi del risultato di Gödel molto utilizzata recita: esiste una formula aritmetica A, che è vera ma che non risulta essere né dimostrabile, né refutabile in S. Gödel stesso fa riferimento a questa lettura della scoperta nei suoi scritti[9]. Tale lettura è anche insidiosa, tuttavia, e responsabile di molti fraintendimenti del risultato gödeliano (si veda più avanti nel paragrafo). La formula aritmetica in questione, infatti, non può essere "vera" nel senso di "universalmente valida" in ogni modello di S. Altrimenti essa risulterebbe anche dimostrabile in S per applicazione del teorema di completezza semantica. La formula è vera nel senso che esiste un modello M di S che la

9 *In primis*, nell'articolo Gödel (1931) che contiene la prima esposizione dei teoremi, o nel testo Gödel (1934) delle lezioni che Gödel tenne all'Institute for Advanced Studies di Princeton nel 1934.

rende tale (anche questo, per effetto del teorema di completezza, notando come la non dimostrabilità di $\neg A$ in S fa sì che S+A sia un'estensione consistente di S stesso). In particolare, è possibile dimostrare nel caso scelto che A è valida nel cosiddetto *modello standard* dell'aritmetica, il cui dominio è costituito dall'insieme N dei numeri naturali.

Fatta la doverosa precisazione, la nota di Gödel svela un importante retroscena della scoperta. È lo stesso Gödel ad indicare l'osservazione come il "principio euristico" del risultato[10]. Tale principio consiste nel confronto tra la nozione di "verità" per le formule del linguaggio di S e la loro "dimostrabilità *in* S". L'occasione di tale confronto, come spiega lo stesso Gödel, fu il tentativo di offrire una dimostrazione di consistenza del sistema d'assiomi per l'aritmetica del secondo ordine mediante l'aritmetica.

Dati due sistemi d'assiomi S e T, T è consistente relativamente a S, se S dimostra l'enunciato Con(T) che esprime la consistenza di T. Con ciò si dimostra la non-contraddittorietà di T *relativamente* a S, in quanto T risulta essere consistente fin tanto che lo è S, o fin tanto che quest'ultimo è supposto essere non-contraddittorio a sua volta.

Gödel sottolinea[11] come l'idea di fondo nel dimostrare la consistenza dell'analisi per via dell'aritmetica, fosse quella di utilizzare il predicato di verità per rappresentare a livello della teoria dei numeri la relazione di appartenenza insiemistica del linguaggio dell'analisi. In altre parole, egli partì dal presupposto che il predicato di verità fosse esprimibile nel linguaggio dell'aritmetica. Tuttavia, si accorse ben presto come questa

10 In una lettera a J. van Hejienoort in S. Feferman et al [2003a], p. 313, e nella risposta ad una missiva di Y. Balas, uno studente della University of Northern Iowa, riprodotta in S. Fefereman et al. [2003], pp. 9-10.

11 Nel passo citato della lettera a Balas.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

assunzione dovesse rivelarsi illusoria, dal momento che conduce alla possibilità di riprodurre nel sistema dell'aritmetica le contraddizioni derivanti dai paradossi della verità.

La ricostruzione gödeliana della genesi della scoperta conduce ad una serie di osservazioni interessanti. La prima riguarda l'emergere di una strettissima relazione tra i teoremi di incompletezza e il risultato sull'indefinibilità aritmetica della nozione di verità dovuto a Tarski [1956]. In effetti, una ricognizione più approfondita dell'epistolario gödeliano offre ulteriori conferme circa il fatto che Gödel possedesse già tutti gli strumenti per anticipare la scoperta di Tarski[12]. D'altra parte, è un fatto noto come la scoperta di Tarski sia stata resa pubblica ben prima della pubblicazione degli articoli relativi (il primo dei quali, del 1933, era in polacco), e che Tarski abbia svolto intorno al 1930 un soggiorno di ricerca proprio a Vienna.

Una seconda osservazione riguarda il significato fondazionale della scoperta gödeliana. Com'è noto, i teoremi di incompletezza vengono collegati con il fallimento della prospettiva fondazionale che fa capo a David Hilbert. Nell'ambito del dibattito sui fondamenti della matematica originatosi a partire dal primo '900 con la scoperta di vari paradossi, Hilbert aveva immaginato un "programma" che faceva ampio ricorso agli strumenti dell'assiomatica formale alla cui nascita e sviluppo Hilbert stesso aveva

12 Il titolo dell'articolo di Gödel recita "Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e sistemi correlati I". Si evince dall'epistolario con Carnap (in Feferman et al. [2003], p. 345), come la parte seconda dell'articolo dovesse contenere una definizione della verità per un linguaggio formale. È ragionevole immaginare che proprio il lavoro di Tarski abbia portato Gödel a ritenere superflua quest'appendice, che infatti non verrà mai pubblicata. Al riguardo, si invita alla lettura anche dell'epistolario tra Gödel e Bernays, con particolare riguardo alla lettera datata 2 aprile 1931 nella quale Gödel appronta una simile definizione.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

contributo. Il progetto hilbertiano si fonda sull'idea che le contraddizioni rilevate siano dovute all'uso di metodi e concetti *ideali* nella matematica, che esulano dal novero delle nozioni *reali* che hanno il loro fondamento e trovano la loro giustificazione nelle strutture costitutive stesse della ragione umana. Al fine di garantire il ricorso "controllato" alle nozioni matematiche superiori, occorre giustificarle per mezzo delle nozioni reali. Ciò si traduce nella proposta di dimostrare la non-contraddittorietà di quelle porzioni della matematica nelle quali si fa ricorso a tali concetti mediante i soli strumenti matematici che, per la loro natura, siano considerati affidabili. Il tentativo di Gödel di mostrare la non contraddittorietà dell'analisi con metodi aritmetici è un esempio perfetto di applicazione dell'idea di Hilbert. Dunque, egli giunse ai teoremi che avrebbero sancito l'impercorribilità di quella proposta tentando di darne realizzazione.

A questo proposito, occorrerebbe anche sottolineare come la valutazione da parte di Gödel circa il significato negativo dei teoremi di incompletezza per la prospettiva fondazionale di Hilbert sia tutt'altro che immediata. Il commento di Gödel [1931], p. 195 al Teorema XI che stabilisce l'indecidibilità dell'enunciato che esprime la consistenza di un sistema d'assiomi è significativa da questo punto di vista:

> Vorrei notare espressamente che il Teorema XI […] non contraddice il punto di vista formalista di Hilbert. Perché questo punto di vista presuppone solo l'esistenza di una dimostrazione di consistenza nella quale siano usati nient'altro che metodi di prova finitari, e rimane concepibile che esistano dimostrazioni finitarie che non *possano* essere espresse nel formalismo [dei Principia Mathematica] (o [della teoria degli insiemi] o [della matematica classica]).

In effetti, anche da altri scritti emerge con chiarezza come vi sia una prima fase nella quale la convinzione di Gödel è che i teoremi di incompletezza non rappresentino necessariamente l'impraticabilità del programma hilbertiano. L'idea di Hilbert, infatti, è quella di dimostrare la non contraddittorietà di quelle porzioni della matematica che fanno ricorso a metodi di prova altamente non costruttivi mediante strumenti che abbiano la stessa evidenza concreta della matematica elementare (ad esempio dell'aritmetica di base). Affinché i teoremi di Gödel possano trovare applicazione in questo senso, occorre supporre che esista un sistema formale d'assiomi, diciamo F, nel quale possano essere riprodotti *tutti* i metodi finitari di prova. In questo caso, dato un sistema G che estenda l'aritmetica di base B (e dunque tale da essere un'estensione di F che contiene B), e tale che gli assiomi di G coinvolgano nozioni matematiche di tipo infinitario, segue dal teorema di Gödel che Con(G) non è dimostrabile in G e, *a fortiori*, non è dimostrabile in F.

I dubbi di Gödel sono legati al fatto che un tale F esista, dubbi che egli ebbe modo di esprimere anche al termine del congresso di Königsberg dove l'annuncio frettoloso della scoperta da parte di Gödel aveva suscitato la curiosità dei presenti e la richiesta di delucidazioni al riguardo (si veda Gödel [1931a], p. 205 in particolare). Da questo punto di vista, la lettura gödeliana differiva da quella che degli stessi risultati davano personalità vicine ad Hilbert stesso. È il caso di von Neumann, che scrisse a Gödel poco dopo la conferenza di Königsberg esprimendo la propria convinzione dell'effetto nefasto per il programma di Hilbert dei teoremi di incompletezza[13]. Seguendo il percorso dei suoi scritti, si nota invece come fu solo a partire da un'intervento ad una conferenza congiunta della Mathematical Association of America e dell'American Mathematical Society svoltasi dal 29 al 30 dicembre del 1933 a Cambridge in

13 Si veda in particolare la lettera datata 10, 12 gennaio 1931 di von Neumann a Gödel in Feferman et al. [2003a]. Altrettanto significativi a proposito di questo tema sono anche i carteggi, in Feferman et al. [2003] e [2003a], di Gödel con Jacques Herbrand e con Paul Bernays, "braccio destro" di Hilbert.

Massachusetts, che si avvertono segnali di un ripensamento da parte di Gödel in questo senso[14].

È interessante notare tuttavia come questo ripensamento non conduca per Gödel al venir meno dell'interesse per la prospettiva fondazionale delineata da Hilbert. Ancora una volta, è il materiale inedito a chiarire questo aspetto del pensiero gödeliano e in particolare il testo di un intervento del 1938 di Gödel al seminario organizzato da Edgar Zilsel, personaggio legato al circolo di Vienna ma costretto al ruolo di docente di un *Gymnasium* viennese a seguito del colpo di Stato di Dollfuss. In quella sede, Gödel ritorna sulla questione sottolineando alcuni aspetti che rendono scientificamente vitale e interessante la prospettiva fondazionale hilbertiana, a prescindere dal fatto che l'obiettivo posto da Hilbert non possa essere raggiunto. Com'è noto, il tema della ripresa in forma modificata del programma di Hilbert ha trovato spazio nella ricerca metamatematica recente lungo linee non dissimili da quelle suggerite da Gödel in quell'intervento[15].

In effetti, il caso del rapporto tra i teoremi di incompletezza e il formalismo di matrice hilbertiana, permette di portare alla luce quello che può essere considerato l'aspetto più problematico della scoperta di Gödel, ovvero il problema della loro interpretazione "filosofica". L'elemento che sta alla base della sua fortuna, infatti, sembra essere anche l'origine della sua condanna. Il fascino dei teoremi di incompletezza ha infatti tratto in inganno molti che vi hanno visto, il più delle volte hanno creduto di vedervi, i significati

14 Il testo dell'intervento di Gödel è riprodotto in Feferman et al. [1995], pp. 45-53 come [1933o].

15 Si veda in particolare Feferman [1988].

più disparati[16]. Vale la pena di citare qui il caso più famoso, originato da un articolo del filosofo J.R. Lucas [1961] e che riguarda la (presunta) confutazione dell'assunto secondo il quale la mente umana non è dissimile da una macchina.

L'argomento ha subíto nel corso degli anni numerosi rimaneggiamenti, fino alla recente rivisitazione da parte di Roger Penrose nei suoi libri [1989] e [1994]. Al di là delle differenze specifiche delle sue varie versioni, la sostanza dell'argomento può essere resa come segue.

Supponiamo, con il meccanicista, che la mente umana sia assimilabile ad una macchina M. Le capacità di questa macchina sono a loro volta analoghe a quelle di un sistema formale del tipo coinvolto dai teoremi di Gödel per alcune osservazioni note, quali la Tesi di Church-Turing sui procedimenti calcolabili e la corrispondenza tra i sistemi formali di assiomi e i modelli teorici delle macchine che portano il nome di Turing stesso. Dunque, per effetto del teorema di Gödel c'è una formula vera non dimostrabile da M, ovvero l'enunciato *G* che "dice di sé stesso" di non essere dimostrabile. I teoremi di Gödel stabiliscono che *G* è *davvero* indimostrabile nel sistema S scelto, dunque consentono di stabilire la verità dell'enunciato. Dimostrando il risultato di Gödel, la mente umana è in grado di attingere a conoscenze inaccessibili per la macchina M che si era supposta ad essa equivalente. Ne consegue che tale supposizione deve essere fallace.

Ora, è evidente che l'argomento in questa forma si presta a molte obiezioni, la considerazione delle quali ci porterebbe ben presto al di là dello scopo del presente lavoro. Vale la pena tuttavia menzionare il fatto, se non altro perché dagli scritti inediti

16 Un'ottima "guida" al proposito, è Franzén [2005].

emerge come Gödel stesso abbia affrontato il problema conferendogli dignità. La versione gödeliana dell'argomento è contenuta nel testo della conferenza dedicata alla memoria di Josiah Willard Gibbs che Gödel fu invitato a tenere nel 1951, a un incontro dell'American Mathematical Society presso la Brown University.

Come è lecito aspettarsi, la versione di Gödel è esente da quegli aspetti più visibilmente discutibili dell'argomento proposto dagli interpreti successivi. Prende le mosse da un'osservazione banale ma fondamentale. Scelto un qualsiasi sistema assiomatico S, l'enunciato che si dimostra indecidibile in S diviene immediatamente decidibile in un'opportuna estensione di S, ad esempio quella ottenuta aggiungendo agli assiomi di S l'enunciato Con(S) che ne esprime la non contraddittorietà. Applicando i teoremi di Gödel a questo nuovo sistema S_1, si ricava l'esistenza di nuovi enunciati indecidibili in S_1 che diventano decidibili nel sistema $S_2=S_1+Con(S_1)$. È ovvio che questo processo di ampliamento delle conoscenze a partire da un dato sistema d'assiomi S può proseguire indefinitamente. Questo fa sì che, per dirla con le parole di Gödel [1951], p. 309, non si potrà mai raggiungere *un* sistema formale S* rispetto al quale poter fare la seguente affermazione: "*Percepisco (con certezza matematica) che le regole e gli assiomi* [di S*] *sono corretti, e per di più credo che essi racchiudano tutte le conoscenze matematiche*". Infatti, la prima parte dell'affermazione porterebbe a ritenere che Con(S*) sia una conoscenza matematica, la quale, essendo indimostrabile in S*, offrirebbe una confutazione della seconda parte.

Il fatto è che il senso di tale conclusione cambia, sottolinea Gödel, se all'espressione "conoscenze matematiche" si attribuisce un valore assoluto o relativo. In senso assoluto, quell'espressione si riferisce, per esemplificare, a tutte le conoscenze matematiche attingibili da un essere onniscente. È evidente come l'assunzione che esse siano racchiudibili in un unico sistema formale di assiomi consistente porta necessariamente a contraddizione. In senso relativo, invece, le "conoscenze matematiche" delle quali si parla potrebbero essere quelle raggiunibili con gli strumenti deduttivi della mente umana. In questo caso, l'argomento considerato porta Gödel [1951], p. 310 a ritenere inevitabile la seguente dicotomia: "*O* […] *le capacità della mente umana sorpassano quelle di ogni macchina finita (anche nel dominio della matematica pura), oppure esistono delle* [conoscenze matematiche] *assolutamente indecidibili*".

In altre parole, i teoremi di incompletezza stabiliscono l'esistenza di enunciati che sono indecidibili in senso relativo, ovvero rispetto ad una scelta del sistema di assiomi di riferimento. Questi enunciati divengono facilmente decidibili in un'estensione opportunamente scelta del sistema dato[17]. Se tuttavia si suppone che esista un sistema di assiomi che rappresenti tutte le conoscenze raggiungibili dalla mente umana mediante metodi di prova di carattere matematico, allora l'unica conclusione possibile è che, rispetto a *questo* sistema, esistano enunciati che siano indecidibili in senso *assoluto*.

Le riflessioni che quest'analisi stimola sono molteplici: dato un sistema di assiomi, a quale condizione una sua estensione può considerarsi legittima? La matematica conosciuta, ha bisogno di nuovi assiomi? Esistono proposizioni matematiche

17 Da rilevare il fatto che l'estensione S_{n+1} di S_n nella catena di sistemi formali a cui si è fatto cenno in precedenza sembra avere la stessa legittimità del sistema esteso: se io credo nella correttezza di S_n, infatti, ritengo che S_n sia consistente in particolare, dunque credo implicitamente nella correttezza di S_{n+1}. Questa osservazione è alla base dello studio delle progressioni di sistemi formali ad opera di Feferman [1962], che sua volta trae spunto da un precedente lavoro di Turing [1939] sulle "logiche ordinali".

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

assolutamente indecidibili? Alcune di queste domanda hanno dato luogo a discussioni e a nuovi filoni di ricerca. Lo stesso Gödel ebbe modo di affrontarle a seguito di un'altra sua scoperta notevole relativa all'ipotesi del continuo di Cantor, come avremo modo di sottolineare più avanti.

2.3 Gli altri contributi di Gödel di carattere logico

La portata dei due risultati analizzati fin qui con maggior dovizia di dettagli sembrerebbe tale da indurre a considerare secondario i rimanenti contributi di Gödel. Al di là del caso specifico delle ricerche gödeliane in teoria degli insiemi, tale atteggiamento sarebbe errato anche nei confronti dei lavori "minori" dell'opera di Gödel. Limitandosi ai lavori di carattere logico-matematico[18], si possono segnalare i seguenti contributi:

1. i lavori Gödel [1932], Gödel [1933] e Gödel [1933a] dedicati alla logica intuizionista, dove Gödel studia i rapporti tra la logica proposizionale e l'aritmetica intuizionista e i corrispondenti sistemi classici offrendo, tra l'altro, una dimostrazione di consistenza relativa dell'aritmetica classica nel sistema dell'aritmetica intuizionista mediante la definizione di una "traduzione" delle formule classiche nel linguaggio intuizionista e un'interpretazione della logica proposizionale intuizionista mediante il predicato di dimostrabilità[19];

18 Una guida snella ai temi trattati dai lavori pubblicati da Gödel è quella contenuta, ad esempio, in Dawson [1983].

19 Uno sviluppo recente che può essere ricondotto alle idee di Gödel [1933a], è quello delle "logiche della giustificazione" di Sergei Artemov - si veda, ad esempio, Artemov e Fitting [2011].

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

2. i due lavori Gödel [1932a] e Gödel [1933b] nei quali Gödel propone, quale risoluzione parziale del problema della decisione di Hilbert, un metodo effettivo per alcune classi di formule del prim'ordine;

3. l'articolo Gödel [1936] "sulla lunghezza delle dimostrazioni", ispirato dal risultato di incompletezza, nel quale Gödel nota infatti come nel caso della teoria formale dei numeri passare alla considerazione del tipo insiemistico successivo (dai numeri agli insiemi di numeri, da questi agli insiemi di insiemi di numeri, ecc.), non solamente porti ad una dimostrazione di enunciati indecidibili in precedenza ma conduca anche ad abbreviare la lunghezza delle dimostrazioni, appunto, di teoremi già disponibili[20];

4. l'articolo Gödel [1944] dedicato alla logica matematica di Russell che contiene una disamina critica di alcuni aspetti dell'opera logica di Russell e, insieme alla memoria di Gödel sull'ipotesi del continuo di Cantor (si veda sotto), è uno dei luoghi di riferimento per ritrovare tracce dell'impostazione "platonista" di Gödel;

5. il contributo pubblicato nel 1958 sulla rivista *Dialectica* – Gödel [1958] - (indicato in letteratura come "l'interpretazione *Dialectica*"), che contiene la dimostrazione di

20 Si tratta di una tipologia di risultato oggi nota come "*speed-up*" che inaugura di fatto la ricerca sulla complessità computazionale delle dimostrazioni formali. Per quanto sia ormai datato, il testo di Buss [1986] rappresenta ancora una buona introduzione al tema.

consistenza per l'artimetica di Peano mediante un formalismo con simboli per funzionali di tipo finito[21].

3. L'ipotesi del continuo di Cantor

"Il problema del continuo di Cantor è semplicemente la questione: Quanti sono i punti su una retta nello spazio euclideo?". La frase è l'incipit di Gödel [1947], lavoro pensato come un commento al risultato di consistenza dell'ipotesi del continuo di Cantor con gli assiomi della teoria degli insiemi che Gödel aveva annunciato nel 1938.

Senza avere la pretesa di ripercorrere qui la storia del problema, l'ipotesi del continuo riguarda la cardinalità C dell'insieme dei numeri reali, o, per rimanere nella metafora gödeliana, il numero dei punti sulla retta, stabilendo che esso coincida con il più piccolo numero infinito maggiore del numero dei punti della retta che si possono contare mediante i numeri interi. L'ipotesi nasce a seguito dei pionieristici lavori di Cantor sulla teoria degli insiemi e alla scoperta della "stratificazione" della nozione di infinito in matematica. In un noto teorema, ad esempio, Cantor aveva stabilito che, fissato un insieme infinito, ad esempio l'insieme N dei numeri naturali, questo risulta avere un numero di elementi che è strettamente inferiore dell'insieme P(N) che contiene tutti gli insiemi di elementi di N, ovvero tutti i sottoinsiemi di detto insieme. Cantor introdusse una scala del tutto analoga a quella decimale per denotare i numeri cardinali infiniti. Detta scala utilizza la prima lettera dell'alfabeto ebraico indicizzata, l'aleph $\aleph$, per

21 Il risultato di Gödel risale in realtà alla fine degli anni '30 ed era stato anticipato da Gödel nel corso di alcune conferenze a Yale e Princeton nei primi anni '40. Il testo della prima conferenza, Gödel [1941], è pubblicato in Feferman et al. [1995]. Il risultato si rivelerà importante per la dimostrazione di consistenza dell'analisi ad opera di Phil Spector nel 1962. Il contributo di Gödel, troverà collocazione tra gli sviluppi di tematiche relative al λ-calcolo. Si veda, al riguardo, Girard [1990].

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

indicarne gli elementi. Così, il primo numero della scala, corrispondente al più piccolo insieme infinito, è $\aleph_0$ che rappresenta ad esempio il numero degli elementi di N. L'insieme P(N), invece, si dimostra avere un numero di elementi pari a $2^{\aleph_0}$ da cui deriva il nome per esso di insieme "potenza" di N. Qual è invece la cardinalità C dell'insieme dei numeri reali? Mediante il celebre "argomento diagonale" di Cantor, si dimostra che l'insieme dei numeri reali è più che numerabile. Si tratta di stabilire dunque quale sia il rapporto tra C e la cardinalità di P(N). A partire dalla nota corrispondenza tra i reali e certi insiemi di numeri razionali (ovvero, tra i reali e le successioni convergenti di razionali), si dimostra che $C=2^{\aleph_0}$. Questo però non è sufficiente a collocare tale numero sulla scala degli *aleph*. Cantor congetturò che non esistessero cardinali infiniti intermedi tra la cardinalità di N e quella dei numeri reali, ipotizzando che valesse $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Tale congettura, passata alla storia appunto come ipotesi del continuo, fu poi generalizzata da Felix Hausdorff nel 1908 ipotizzando che valga $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$, per ogni numero ordinale α. Sotto vari punti di vista, l'ipotesi sembra un completamento naturale della teoria cantoriana: non solo esiste una scala di numeri infiniti, ma anche un'unica operazione insiemistica capace di generarli tutti, quella di potenza insiemistica, che corrisponde all'applicazione dell'operazione basilare di "insieme di".

Il problema legato all'ipotesi di Cantor era ovviamente proprio la sua natura ipotetica. Una spinta decisiva alla necessità di risolverla fu constituita dall'assiomatizzazione della teoria cantoriana degli insiemi a partire dal fondamentale contributo di Ernst Zermelo nel 1908.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

Gödel iniziò ad occuparsi del problema del continuo intorno al 1935. Come detto, annunciò il risultato delle proprie ricerche nel 1938 essendo riuscito a dimostrare come l'ipotesi di Cantor sia consistente con gli altri assiomi della teoria degli insiemi. L'anno successivo Gödel pubblicò l'articolo [1939] che riportava i dettagli della dimostrazione. Ad esso segue Gödel [1940], che contiene il testo delle lezioni al riguardo che Gödel tenne a Princeton tra il 1938 e il 1939 a seguito del proprio trasferimento negli Stati Uniti, nel quale si segue una strategia dimostrativa diversa.

Da un punto di vista matematico, la dimostrazione di Gödel presenta aspetti di notevole interesse. Il primo di essi è l'introduzione della collezione degli "insiemi costruibili", la cui idea di base può essere spiegata come l'applicazione di uno dei precetti dell'approccio cosiddetto predicativista alla matematica di Henri Poincaré e Émile Borel tra gli altri. Mi riferisco in particolare all'idea secondo la quale, stabilito che un insieme è il risultato del raggruppamento di certi elementi sulla base di una proprietà ad essi comune[22], tale procedimento è legittimo in particolare se la proprietà in questione non contiene alcun riferimento alla totalità che si cerca di definire mediante quella proprietà stessa. Con l'apporto decisivo da parte di Russell, questo precetto prese la forma del *principio del circolo vizioso*: non è ammissibile alcun insieme X che sia definito mediante una formula logica che contenga quantificazioni sugli elementi di X. La definizione della gerarchia dei costruibili di Gödel segue tale principio: ammesso di aver effettuato la costruzione dei costruibili fino ad un dato livello α, sono insiemi

22 Questo principio, noto come il principio di *comprensione*, risulta contraddittorio nella sua forma più ingenua, ovvero senza restrizione alcuna sulle proprietà ammissibili. Una variante non contraddittoria è quella utilizzata da Zermelo per la succitata assiomatizzazione del 1908 nella forma di un principio di *separazione* per il quale esiste un insieme in relazione ad una qualsiasi proprietà goduta *dagli elementi di un insieme dato*.

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

costruibili di livello $\alpha+1$ tutti e soli gli insiemi che sono definibili mediante una formula del prim'ordine del linguaggio della teoria degli insiemi in cui i quantificatori siano ristretti agli elementi del precedente livello α.

Le proprietà della gerarchia così introdotta sono notevoli. Tra le altre, quella cruciale ai fini del risultato gödeliano ovvero di costituire un modello per gli assiomi della teoria degli insiemi e per l'ipotesi del continuo generalizzata. I costruibili si sono rivelati uno strumento di indagine estremamente proficuo e si sono meritati grande considerazione nella ricerca odierna in teoria degli insiemi[23].

Un secondo aspetto notevole della prova, anzi, *delle prove* di Gödel e in questo caso di quella offerta durante le lezioni a Princeton, riguarda l'introduzione di una nuova assiomatizzazione della teoria degli insiemi la cui paternità è condivisa da Gödel con Paul Bernays. L'innovazione principale della teoria BG, come essa è nota in letteratura, consiste nel possedere due sorta di variabili per le collezioni che vengono di conseguenza suddivise tra *insiemi* e *classi*. Questa distinzione introduce sostanzialmente una differenza di "taglia" tra le collezioni: sono "grandi" le classi, ad esempio l'insieme V di tutti gli insiemi, e "piccoli" gli insiemi. Lo strattagemma è un altro modo per evitare i paradossi. Le proprietà "problematiche", ad esempio quella identificata dalla formula $x=x$ che definisce V, possono essere legittime fin tanto che individuano delle classi, ma escluse dagli assiomi della teoria come legittime istanze degli assiomi per la

23 Tale considerazione è testimoniata, ad esempio, dalle monografie dedicate a indagini correlate agli insiemi costruibili come Devlin [1984].

formazione degli insiemi. Anche la teoria BG ha avuto un notevole successo, seppure forse limitato al campo dell'assiomatica formale e alle indagini di tipo fondazionale.

I due aspetti ai quali si è fatto cenno, e che riguardano, per così dire, la "parte matematica" del risultato di Gödel, sono ben lungi dall'esaurirne l'interesse. Com'è facile immaginare, la dimostrazione gödeliana si presta anche a un'altrettanto interessante disamina concettuale. Lo spunto può essere ad esempio legato alla "forma" del teorema. Come detto, esso sancisce la consistenza dell'ipotesi del continuo con la teoria degli insiemi. Dunque, in particolare Gödel non dimostra che l'ipotesi è vera, ma solo che la teoria degli insiemi nella sua forma usuale non dimostra la negazione dell'asserto di Cantor e dunque non lo confuta. Come appare chiaro dalla lettura di [1947], Gödel si era convinto che l'ipotesi del continuo fosse parimenti *indimostrabile* a partire dagli assiomi della teoria degli insiemi. Dunque, che anche la sua negazione fosse consistente con la teoria degli insiemi e che il problema del continuo di Cantor fosse indecidibile a partire da quegli assiomi. Detto per inciso, che Gödel avesse ragione fu dimostrato da Paul G. Cohen, seppur soltanto nel 1963.

Gödel era dunque convinto di essere di fronte al materializzarsi del fenomeno dell'incompletezza sintattica rispetto all'ipotesi cantoriana, per di più in una *nuova forma*. Si è detto infatti come gli enunciati che risultano indecidibili per i teoremi di Gödel, siano tali in senso relativo. Gödel sembra ritenesse invece che esistessero in campo insiemistico enunciati indecidibili in senso *assoluto*[24]. Con quest'ultima

24 Gödel esprime tale convinzione in [1938a] e [1940a] che contengono i testi di due interventi di Gödel sul tema, a Göttingen e alla Brown University. Dei temi trattati in queste circostanze si trova eco nell'intervento di Gödel [1946] alla Princeton Bicentennial Lecture. Rispetto a quest'ultima fonte, si dovrebbe anche tenere in considerazione il materiale ad esso legato nella corrispondenza tra Gödel e Tarski in Feferman et al. [2003].

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

espressione, egli intendeva indicare enunciati indecidibili rispetto *ad ogni completamento assiomatico della teoria degli insiemi*. Per quanto questa posizione abbia una natura transitoria nell'economia del pensiero gödeliano, e quindi possa essere fatta rientrare nella varietà di posizioni espresse da Gödel su questioni inerenti l'ipotesi di Cantor[25], l'osservazione è interessante e merita, a mio avviso, di essere tenuta in considerazione.

Il valore epistemologico di una simile istanza del fenomeno di indecidibilità formale è infatti profondamente diverso rispetto a quella emersa in relazione ai teoremi di incompletezza. In parte, alla questione si è già fatto cenno: enunciati di questo genere sarebbero tali da rappresentare potenziali ostacoli per la capacità deduttiva della mente umana, come Gödel aveva notato nel corso della Gibbs Lecture. Gli effetti sull'assiomatizzazione delle conoscenze insiemistiche sarebbero altrettanto drammatici. Perché, nota Gödel in [1938a], p. 155, rispetto a enunciati assolutamente indecidibili "la teoria degli insiemi si biforca in due sistemi differenti, simili alla geometria Euclidea e a quella non-Euclidea". Evidentemente Gödel si riferisce qui al fatto che se *A* è un enunciato assolutamente indecidibile nel senso descritto, allora i due sistemi T+*A* e T+¬*A* sono due estensioni consistenti di T. Tuttavia, se aggiungendo l'enunciato di

25 Nel 1938 Gödel esprime la convinzione che l'ipotesi del continuo sia *vera* ma consistente con gli assiomi della teoria degli insiemi, anche nel caso in cui tra questi figurino "assiomi più forti dell'infinito". A partire dagli anni '40 Gödel matura la convinzione che l'ipotesi di Cantor sia *indecidibile* e *falsa*. In [1947] egli si rivela possibilista, tuttavia, che esistano assiomi in grado di stabilirne dimostrativamente la falsità. In uno scritto non pubblicato del 1970 circa, Gödel dimostra $C=\aleph_2$. La dimostrazione è errata, come lo stesso Gödel noterà (si veda il paragrafo conclusivo del presente contributo), ma nell'emendare la propria dimostrazione, finirà per ribadire la plausibilità dell'ipotesi $2^{\aleph_0}=\aleph_2$. Tuttavia è dello stesso anno un altro scritto inedito Gödel [1970b] nel quale si dimostra l'ipotesi di Cantor "a partire da un assioma estremamente plausibile".

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

consistenza a una teoria data non si fa altro che rendere esplicita l'accettazione dei suoi assiomi, in questo caso sembrano mancare i presupposti per giustificare una delle due scelte in modo analogo. In altre parole, si dovrebbero cercare nel "contenuto matematico" di A le motivazioni per aggiungere tale enunciato, o la sua negazione come *nuovo assioma* della teoria degli insiemi. La conclusione inevitabile sembra essere che la teoria degli insiemi, come rappresentante delle nostre conoscenze matematiche, ha bisogno di nuovi assiomi. Ma quali? Gödel riteneva che la prospettiva più promettente fosse costituita degli "assiomi dell'infinito" che sostanzialmente stabiliscono l'esistenza di insiemi "molto grandi", tipicamente nella forma di grandi cardinali. Rispetto a enunciati di questo tipo, egli riteneva "non impossibile" caratterizzare per via non ricorsiva un nuovo concetto di dimostrabilità per il quale "valga qualche teorema di completezza che asserisca come ogni proposizione esprimibile nella teoria degli insiemi risulti decidibile dagli assiomi attuali più qualche asserzione vera sull'estensione dell'universo insiemistico". Quest'idea gödeliana ha dato vita a sviluppi e si è rivelata una proficua linea di ricerca che ha visto fino a oggi il succedersi di contributi di numerosi e illustri studiosi nel campo della teoria degli insiemi[26].

4. Gödel e la filosofia

Il testo dedicato al problema del continuo di Cantor segna un momento importante anche per gli sviluppi del pensiero di Gödel. È nella sua riedizione del 1964, corredata da un'appendice alla prima versione, che si trova una delle più evidenti esposizioni

26 Una discussione relativa al problema dei nuovi assiomi per la matematica collegata all'impostazione gödeliana si ritrova in Feferman [1999]. Il "programma di Gödel" per nuovi assiomi ha inspirato più recentemente i lavori di Hugh Woodin, del quale si può consultare, ad esempio, Woodin [2005]. Una presentazione degli "assiomi dell'infinito", infine, si trova in Kanamori [2008].

della filosofia "platonista" di Gödel. Il punto di partenza per le riflessioni gödeliane è quanto si è posto in evidenza al termine del paragrafo precedente: l'esistenza di proposizioni matematiche indecidibili rivela il fatto che i nostri assiomi "non contengono una descrizione completa" della realtà insiemistica. Perché di una "realtà" si tratta:

> [G]li oggetti della teoria degli insiemi […] chiaramente non appartengono al mondo fisico, e persino la loro connessione indiretta con l'esperienza sensibile è molto blanda (a causa principalmente del fatto che i concetti insiemistici giocano solo un ruolo minore nelle teorie fisiche di oggi).
> Ma a dispetto della loro lontananza dall'esperienza sensoriale, possediamo qualcosa di simile ad una percezione anche degli oggetti della teoria degli insiemi, come si vede dal fatto che gli assiomi ci appaiono come principi veri. Non vedo ragioni per le quali dovremmo avere meno fiducia in questo tipo di percezione, cioè l'intuizione matematica, rispetto alla percezione sensoriale, che ci porta a costruire teorie fisiche e ad aspettarci che in futuro la percezione dei sensi sarà in accordo con esse, e a credere inoltre che questioni non decidibili al momento possiedano un significato e possano essere decise in futuro.

Il passo citato contiene riferimenti agli aspetti più rilevanti del realismo di Gödel. A livello ontologico, l'idea che gli enti matematici costituiscano una realtà a sé stante, non dissimile per natura dalla realtà alla quale appartengono gli oggetti fisici. A livello epistemologico, la convinzione che esista una facoltà percettiva, identificata in una forma di "intuizione", che svolga rispetto alla realtà matematica il ruolo che la percezione svolge rispetto a quella fisica.

Le considerazioni di tipo filosofico di Gödel hanno attratto l'attenzione di molti studiosi. Se davvero le capacità di Gödel in questo campo e la profondità del suo punto di vista siano anche solo lontanamente paragonabili al suo acume logico-matematico, è questione piuttosto controversa. In realtà, non esiste infatti alcuna fonte pubblicata nella quale Gödel abbia esposto in modo sistematico il proprio pensiero. Né sembrano essere

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

d'aiuto in questo caso le altre fonti a disposizione. Gli scritti inediti non costituiscono eccezione, e regalano solo stralci che ben poco aggiungono al senso del passo citato[27]. Anche le riflessioni di Wang al riguardo, pur rappresentando uno sforzo meritevole di ritrovare tracce di sistematicità negli accenni di Gödel alla propria visione filosofica, sembrano più adatte a evidenziarne la reticenza a diffondersi al riguardo. Anche l'interesse di Gödel per la filosofia di Husserl, che è stata rimarcata da molti studiosi[28], non sembra poter condurre ad una chiarificazione significativa delle tematiche filosofiche gödeliane.

In altre parole, la "filosofia di Gödel" sembra aver suscitato una reazione che sembra giustificata più dal fatto che riflessioni di un certo tipo siano state avanzate da uno studioso del calibro di Gödel che al loro effettivo "peso" nell'economia del suo profilo. Tuttavia, occorre sottolineare come la disamina del realismo gödeliano abbia probabilmente contribuito in modo rilevante a tener vivo il dibattito sul tema nel campo della filosofia della matematica.

Di certo, l'attività di ricerca di Gödel a partire dal suo trasferimento negli Stati Uniti alla fine degli anni '30 del '900 è fortemente condizionata da una vera e propria "svolta filosofica", della quale è possibile trovare traccia negli scritti inediti e nella corrispondenza, che porta a una marginalizzazione dei temi di ricerca di carattere più marcatamente matematico per privilegiare questioni di natura concettuale[29].

27 Tra gli scritti inediti in questo senso, quelli probabilmente più significativi sono ancora il testo della Gibbs Lecture del 1951 e il progetto incompiuto [1953] di uno scritto su Carnap, presente in varie versioni in Feferman et al. [1995].

28 Si vedano, in particolare, Tieszen [1998], Føllesdal [1999] e van Hatten e Kennedy [2003].

29 Rappresentativo in questo senso è anche il contributo inedito [1970] sulla prova ontologica dell'esistenza di Dio che ha attirato l'attenzione di alcuni degli studiosi tra i quali la nota è stata fatta circolare a causa di alcune interessanti implicazioni tecniche. Fanno in parte eccezione, invece, i lavori

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

Con il degradare della salute fisica e mentale, la produzione di Gödel comincia a risentire fortemente del suo pessimo stato di salute. Piuttosto significativo al riguardo, è un contributo tardo, Gödel [1970a], che contiene una presunta dimostrazione del fatto che la cardinalità del continuo sia pari ad $\aleph_2$ mediante assunzioni sull'esistenza di certi grandi cardinali. La lettera Gödel [1970c] scritta poco dopo e mai inviata ad Alfred Tarski è una testimonianza del difficile stato nel quale doveva trovarsi Gödel, in cui periodi di lucidità si alternavano a momenti nei quali le sue "funzioni mentali" risultavano fortemente compromesse.

La lettera emenda la precedente dimostrazione, a testimonianza di quanto lo "stato mentale" di Gödel fosse "notevolmente migliorato". Gödel sottolinea tuttavia come l'ipotesi $2^{\aleph_0}=\aleph_2$ continui a sembrare "plausibile", nonostante tutto. Al di là del giudizio di merito, il farsi carico di un'ipotesi innovativa penso rappresentasse, per un autore abituato a indagare territori inesplorati e aprire nuove strade, il segno più evidente del fatto che l'acume e la vitalità intellettuale di Gödel potessero scintillare ancora, nel buio della decadenza.

[1949], [1949a], [1950] e, tra gli inediti, [1946-49] e [1949b] che contengono una soluzione inedita delle equazioni cosmologiche della relatività generale di Einstein (con alcune curiose conseguenze come l'esistenza di linee temporali chiuse che renderebbero possibili i viaggi nel tempo) e osservazioni relative al legame tra la teoria della relatività e la filosofia di Kant.

5. Bibliografia

5.1 Bibliografia primaria

Feferman S. et al. (1986), *Kurt Gödel Collected Works vol. 1: Publications 1929-1936*, Oxford University Press, New York.

Feferman S. et al. (1990), *Kurt Gödel Collected Works vol. I1: Publications 1938-1974*, Oxford University Press, New York.

Feferman S. et al (1995), *Kurt Gödel Collected Works vol. II1: Unpublished Essays and Lectures*, Oxford University Press, New York e Oxford.

Feferman S. et al (2003), *Kurt Gödel Collected Works vol. IV: Correspondence A-G*, Oxford University Press, Oxford.

Feferman S. et al (2003a), *Kurt Gödel Collected Works vol. V: Correspondence H-Z*, Oxford University Press, Oxford.

Gödel K. (1929), "Über die Vollständigkeit des Logikkalküls," *Habilitationschrifft*, Università di Vienna, stampato e tradotto in inglese in Feferman et al. (1986), pp. 60–101.

Gödel K. (1930), "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatschefte für Mathematik und Physik* , vol. 37, pp. 349–360. Ristampato con traduzione inglese a a fronte in Feferman et al. (1986), pp. 102–123.

Gödel K. (1930a), "Vortrag über Vollständigkeit des Funktionenkalküls", in Feferman et al. (1986), pp. 13–29.

Gödel K. (1931), "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatschefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, pp. 173–198. Ristampato con traduzione inglese a fronte in Feferman (1986), pp. 144–195.

Gödel K. (1931a), “Diskussion zur Grundlegung der Mathematik”, *Erkenntnis*, vol. 2, pp. 135–151. Ristampato con traduzione inglese a fronte in Feferman et al. (1986), pp. 201–205.

Gödel K. (1932), “Zum intuitionistischen Aussagenkalkül”, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, vol. 69, pp. 65-66. Ristampato con testo inglese a fronte in Feferman et al. (1986), pp. 222-225.

Gödel (1932a), “Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik”, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, vol. 2, pp. 27-28. Ristampato con testo inglese a fronte in Feferman et al (1986), pp. 231-233.

Gödel K. (1933), “Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie,” *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, vol. 4, pp. 34-38. Ristampato con traduzione inglese a fronte in Feferman et al. (1986), pp. 286-295.

Gödel K. (1933a), “Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls”, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, vol. 4 , pp. 39-40. Ristampato con traduzione inglese a fronte in Feferman et al. (1986), pp. 300-301.

Gödel K. (1933b), “Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls”, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 40, pp. 433-443. Ristampato con traduzione inglese a fronte in Feferman et al. (1986), pp. 306-326.

Gödel K. (1934), “On undecidable propositions of formal mathematics”, in M. Davis (a cura di), *The undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions*, Raven Press, 1965, pp. 4-38. Ristampato in Feferman et al. (1986), pp. 346-367.

Gödel K. (1936), “Über die Lange von Beweisen,” *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, vol. 7, pp. 23-24. Ristampato con traduzione inglese a fronte in Feferman (1986), pp. 396-398.

Gödel K. (1938), “The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, U.S.A., vol. 24 (1938), pp. 556-557. Ristampato in Feferman et al. (1990), p. 26.

Gödel K. (1938a), “Vortrag Göttingen”, in Feferman et al. (1995), pp. 126-155.

Gödel K. (1939), “Consistency proof for the generalized continuum hypothesis”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, U.S.A., vol. 25, pp. 220-224. Ristampato in Feferman et al. (1990), pp. 28-32.

Gödel K. (1940), “The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory”, *Annals of Mathematics Studies 3*, Princeton University Press, 1940. Ristampato in Feferman et al. (1990), pp. 33-101.

Gödel K. (1940a), “Lecture [on the] consistency [of the] continuum hypothesis (Brown University)”, in Feferman et al. (1995), pp. 175-185.

Gödel K. (1941), “In what sense is intuitionistic logic constructive?”, in Feferman et al. (1995), pp. 189-201.

Gödel K. (1944), “Russell’s mathematical logic, Russell's mathematical logic”, pp. 123-153 in P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell (Library of Living Philosophers series)*, Northwestern University Press, Evanston. Ristampato in Feferman et al. (1990), pp. 119-143.

Gödel K. (1946), "Remarks before the Princeton Bicentennial lecture", in Feferman et al. (1990), pp. 150-153.

Gödel K. (1946-49), "Some observations about the relationship between theory of relativity and Kantian philosophy", in Feferman et al (1995), pp. 230-260.

Gödel K. (1947), "What is Cantor's continuum problem?", *American Mathematical Monthly*, vol. 54, pp. 515-525. Ristampato in Feferman et al. (1990), pp. 176-188.

Gödel K. (1949), "An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation," *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, pp. 447-450. Ristampato in Feferman et al. (1990), pp. 190-198.

Gödel K. (1949a), "A remark about the relationship about relativity theory and idealistic philosophy", in P.A. Schilpp (a cura di), *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* (*Library of Living Philosophers series*), Northwestern University Press, Evanston, 1949. Ristampato in Feferman et al. (1990), pp. 202-207.

Gödel K. (1949b), "Lecture on rotating universes", in Feferman et al. (1995), pp. 269-289.

Gödel K. (1950), "Rotating universes in general relativity theory", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians in Cambridge*, Massachusetts, I, pp. 175-181. Ristampato in Feferman et al. (1990), pp. 208-216.

Gödel K. (1951), "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications", in Feferman S. et al. (1995), pp. 304-323.

Gödel K. (1953), "Is mathematics syntax of language?", in Feferman et al. (1995), pp. 334-363.

Gödel K. (1958), “Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes”, *Dialectica*, vol. 12, pp. 280-287. Ristampato con traduzione inglese a fronte in Feferman et al. (1990), pp. 240-252.

Gödel K. (1964), Ristampa di Gödel (1947) in P. Benacerraf e H. Putnam (a cura di), *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey; Basil Blackwell, Oxford. Ristampato in Feferman et al. (1990), pp. 254-270.

Gödel K. (1970), “Ontological proof”, in Feferman et al (1995), pp. 403-404.

Gödel K. (1970a), “Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is $\aleph_2$”, in Feferman et al. (1995), pp. 420-421.

Gödel K. (1970b), “A proof of Cantor’s continuum hypothesis from a highly plausible axiom on the orders of growth”, in Feferman et al. (1995), pp. 422-423.

Gödel K. (1970c), “[Unsent letter to Alfred Tarski]”, in Feferman et al. (1995), pp. 424-425.

5.2 Bibliografia secondaria

Artemov S. e Fitting M. (2011), “Justification logic”, in E. Zalta (a cura di), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, url: http://plato.stanford.edu/entries/logic-justification/.

Buss, S.R. (1986), *Bounded Arithmetic*, Bibliopolis, Naples, Italy, 1986.

Dawson, J. W. Jr. (1983), “The published work of Kurt Gödel. An annotated bibliography”, *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 24, n. 2, pp. 255-284.

Dawson, J. W. Jr. (1993), “The compactness of first-order logic: from Gödel to Lindström”, *History and Philosophy of Logic*, vol. 14, pp. 15-37.

Devlin K. (1984), *Constructibility*, Berlin: Springer Verlag.

Feferman S. (1962), “Transfinite recursive progressions of axiomatic theories”, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 27, pp. 259–316.

Feferman S. (1986), “Gödel’s life and work”, in Feferman et al. (a cura di), *Kurt Gödel Collected Works vol. 1*, Oxford University Press, New York, pp. 1-36.

Feferman S. (1988), “Hilbert’s program relativized: proof-theoretical and foundational reductions”, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, pp. 364-384.

Feferman S. (1999), “Does mathematics need new axioms?”, *American Mathematical Monthly*, vol. 106, pp. 99-111.

Føllesdal D. (1999), “Gödel and Husserl,” in Jean Petitot (a cura di) *Naturalizing Phenomenology: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, Writing Science, Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1999.

Franzén T. (2005), *Gödel’s theorem: an incomplete guide to its use and abuse*, A.K. Peters.

Girard J.Y. (1990), *Proof and Types*, Cambridge University Press.

Hilbert D. and Ackermann W. (1928), *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin: Springer. Tradotto in inglese da G.G. Leckie e F. Steinhardt come *Principles of mathematical logic*, New York: Chelsea, 1950.

Kanamori A. (2008), *The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings*, Springer.

Lucas J.R. (1961), “Minds, machines and Gödel”, *Philosophy*, vol. 36, pp. 112–127.

Löwenheim L. (1915), “Über Möglichkeiten im Relativkalkül”, *Mathematische Annalen*, vol. 76, pp. 447–470.

Penrose R. (1989), *The emperor's new mind*, Oxford University Press.

Penrose R. (1994), *Shadows of the mind*, Oxford University Press.

Post E. (1921), “Introduction to a general theory of elementary propositions”, *American Journal of Mathematics*, vol 43, pp. 163-185.

Skolem T. (1923), “Einige Bemerkungen zu axiomatischen Begründung der Mengenlehre,” *Mathematikerkongressen i Helsingfors 4–7. Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen*, Redogoerelse, pp. 217–232

Tarski A. (1956), “The concept of truth in formalized languages”, tradotto da J.H. Woodger in *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford: Clarendon Press, pp. 152-278. Originariamente pubblicato in tedesco nel 1935 come Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica Commentarii Societatis Philosophicae Polonorum*, 1, pp. 261-405.

Tieszen R. (1998), “Gödel's path from the incompleteness theorems (1931) to phenomenology (1961)”, *Bullettin of Symbolic Logic*, vol. 4, pp. 181-203.

Turing A. (1939), “Systems of logic based on ordinals”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 45, pp. 161–228.

van Atten M. e Kennedy J. (2003), “On the philosophical development of Kurt Gödel”, *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 9, pp. 425-476.

van Heijenoort J. (1967) (a cura di), *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, Harward University Press.

Wang H. (1974), *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul, London.

Wang H. (1987), *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

Wang H. (1996), *A logical journey. From Gödel to Philosophy*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

Woodin H. (2005), "The continuum hypothesis", in R. Cori et al. (a cura di), *Logic Colloquium 2000*, Lecture Notes in Logic, 19, Urbana, IL: Assoc. Symbol. Logic, pp. 143–197.