

dei pensatori classici. Tali aspetti rendono il nucleo del progetto freghiano ben definito e i suoi contorni sufficientemente sfumati per essere già fecondi di ulteriori sviluppi.

È necessario che io spenda un ultimo commento sul taglio di questo contributo. Può stupire il lettore più esperto che questa introduzione al pensiero di Frege proceda da una prospettiva almeno in apparenza così manifestamente parziale: l'interesse di Frege per il problema dei fondamenti. Ho adottato questo taglio scientemente. Sono convinta che dare una impostazione così decisa a una introduzione alla filosofia freghiana sia non solo storicamente e filosoficamente corretto, ma anche didatticamente utile. Credo sia impossibile, oltre che scorretto, avere un quadro generale della filosofia di Frege, se non si tiene costantemente a mente che ogni sforzo filosofico di Frege è volto a motivare il suo approccio fondazionale alla matematica. La sua logica, la sua filosofia del linguaggio, la sua epistemologia riassumono, ampliandolo a nuovi orizzonti teoretici, il tentativo di rispondere alla domanda sulla natura dei numeri. Naturalmente, è riduttivo pensare che il lavoro di Frege si sia limitato a *casi* di natura matematica: la sua filosofia del linguaggio ne è un chiaro esempio. Per questo ho parlato di ampliamento a nuovi orizzonti teoretici. Tuttavia, la spinta iniziale e lo scopo ultimo di Frege non sono mai stati l'inaugurazione di nuovi ambiti di ricerca (la filosofia del linguaggio), la revisione fine a se stessa di ambiti già consolidati (la riformulazione delle categorie logiche), o il mero confronto coi temi tradizionali della filosofia a lui contemporanea (l'epistemologia empirista). Tutto lo sforzo teoretico di Frege è concentrato verso un unico obiettivo: la fondazione della matematica su basi scientificamente solide. La mia intenzione, in questo contributo, è quindi di indirizzare esplicitamente il lettore a considerare la filosofia freghiana da questa prospettiva, perché ritengo che solo da essa sia possibile comprendere il pensiero di Frege nel suo complesso.

2. CENNI BIOGRAFICI E CRONOLOGIA DELLE OPERE PRINCIPALI

Friedrich Ludwig Gottlob Frege nasce a Wismar l'8 novembre del 1848 da famiglia luterana. Il padre, Karl Alexander (1809–1866), fu teologo e, insieme alla madre di Frege, Auguste Bialloblotzky (morta nel 1878), fondatore e direttore della locale scuola superiore femminile. Alla morte di Karl, sarà Auguste a prenderne il posto nella direzione dell'istituto e a sostenere il figlio anche economicamente sino ai primi passi in ambito accademico. Frege si iscrive all'Università di Jena nel 1869, ma successivamente si trasferisce a Gottinga nel 1871 dove segue corsi di filosofia, matematica e fisica. A Gottinga ottiene il dottorato nel dicembre 1873 con una tesi in geometria. Inizia a tenere corsi come *Privatdozent* a Jena nel 1874, dove rimane fino al 1918, anno del suo ritiro dall'attività accademica. Sposa Margarete Lieseberg (1856–1904) nel 1887. Hanno diversi figli, tutti morti in tenera età. Adottano Paul Otto Alfred, ingegnere, caduto al fronte nel 1945. Probabilmente sulla scorta delle delusioni intellettuali, del fallimento del programma logicista e della morte della moglie, Frege sviluppa una depressione che gli impedisce di pubblicare nuovi lavori fra il 1907 e il 1917, eccezion fatta per un articolo di polemica contro il formalista Thomae, già bersaglio di pesanti critiche nei *Fondamenti*. Solo nel 1924-25 Frege ricomincia a dedicarsi vigorosamente alla ricerca, dando alla luce le *Ricerche Logiche*. Negli ultimi anni della sua vita, come testimoniato dai diari privati,³ Frege, da sempre sostenitore della monarchia, diventa un conservatore radicale, anti-democratico e anti-socialista, sino a manifestare un'indole razzista, in particolare contro i Francesi, gli Ebrei e i Cattolici. Muore il 26 luglio del 1925 a Bad Kleinen.

³ Gottfried & Kienzler [1994].

1879: *Ideografia, un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico*, in *Logica e aritmetica*

1884: *I fondamenti dell'aritmetica. Un'indagine logico-matematica sul concetto di numero*, in *Logica e aritmetica*

1891: *Funzione e concetto*

1892: *Senso e denotazione*

1892: *Concetto e oggetto*

1893: *I principi dell'aritmetica, derivati in forma ideografica*, volume I

1903: *I principi dell'aritmetica, derivati in forma ideografica*, volume II

1918: *Il pensiero. Una ricerca logica*

1918: *La negazione. Una ricerca logica*

1923: *Le connessioni dei pensieri. Ricerche logiche. Terza parte*

1969: *Scritti postumi*

1976: *Epistolario scientifico*

3. IL PROBLEMA DEI FONDAMENTI

Il contesto intellettuale in cui Frege inizia la sua ricerca è estremamente stimolante.⁴

All'inizio del XIX secolo, la geometria euclidea, che fino ad allora aveva rappresentato il paradigma di assoluta certezza matematica, perde il proprio status teorico privilegiato a causa dell'invenzione - o, se si preferisce, della scoperta - delle geometrie non euclidee.⁵

⁴ Per una trattazione del quadro storico-teorico in cui si inserisce la ricerca freghiana, cfr. Borga e Palladino [1997]: §§ 1-3.

⁵ Lo stesso Frege, ad esempio, non concederà alla geometria lo statuto di scienza analitica *a priori*, ma, con Kant, la riterrà sintetica *a priori*: cfr. Frege [1884]: § 13 e § 89. Tutte le citazioni dai testi di Frege sono da

Durante i primissimi anni di docenza di Frege, a Halle Georg Cantor sviluppa il nucleo fondamentale della teoria degli insiemi. Si inaugura in questo stesso periodo la teoria dei numeri complessi.

Tuttavia, a questo straordinario sviluppo, secondo Frege, non si accompagna l'altrettanto necessaria preoccupazione, di natura più filosofica, di chiarire in modo inequivocabile la natura di quelle entità attorno a cui ruota l'indagine matematica.⁶ Frege lamenta la mancanza di una definizione esplicita delle nozioni matematiche non solo fondamentali ma, soprattutto, apparentemente più semplici, come ad esempio quelle di funzione, limite e numero naturale. Se l'indagine matematica stessa manca di fornire una definizione della natura delle nozioni cardine su cui si fonda, ecco che l'edificio matematico posa su basi incerte. Primo compito, dunque, è quello di fondare la matematica su basi sicure, a cominciare dall'aritmetica, in quanto scienza matematica fra le più basilari, fornendo definizioni esplicite delle nozioni aritmetiche fondamentali.

3.1 IL LOGICISMO

L'idea essenziale di Frege è che l'aritmetica deve essere fondata sulla logica, perché il suo rigore scientifico possa essere irrefutabilmente assicurato. Secondo Frege, la logica, in quanto scienza delle leggi generali del pensiero, costituisce il fondamento ultimo su cui

intendersi relativamente all'edizione italiana citata in bibliografia. Ove ve ne fosse più di una, il riferimento è da intendersi a quella più recente.

⁶ Kenny [2003]: 5: "Tutta quella imponente costruzione poggiava a suo giudizio su fondamenta malferme. I matematici non comprendevano realmente quello che stavano facendo, nemmeno al livello delle nozioni più basilari. Non soltanto cioè mancava una chiara comprensione circa la vera natura dei numeri immaginari come $\sqrt{-1}$, o di numeri irrazionali come $\sqrt{2}$ o π o di numeri frazionari come $2/3$, o di numeri interi negativi come -1 ; il difetto di comprensione cominciava già con i numeri naturali, come 1, 2 e 3. I matematici, secondo Frege, non erano in grado di spiegare la natura degli oggetti primari della loro scienza, e dunque le basi stesse della disciplina che insegnavano. Porre rimedio a tale mancanza, esplicitando in modo chiaro e rigoroso i fondamenti logici e filosofici della matematica, fu lo scopo cui consacrò l'esistenza".

l'intero edificio scientifico deve posarsi.⁷ Il nucleo fondamentale di questo progetto sta nella riduzione dell'aritmetica dei numeri naturali alla logica. Tale riduzione consta di due passaggi essenziali: innanzitutto, è necessaria una definizione esplicita e rigorosa delle nozioni aritmetiche fondamentali; in seguito, è necessario dimostrare la derivabilità delle verità dell'aritmetica da leggi meramente logiche, attraverso regole di inferenza e in base alle definizioni approntate. Questo tentativo fondazionale – perché, ahimè, rimarrà solo un tentativo – passa sotto il nome di *logicismo*. Questo è il nucleo della ricerca freghiana, questa è la chiave di lettura alla luce della quale è necessario intenderne i risultati.

4. LA RICONCETTUALIZZAZIONE DELLE CATEGORIE LOGICHE

Sin dagli inizi della sua riflessione sulla fondazione logicista della matematica, Frege si lamenta della limitatezza degli strumenti offerti dal linguaggio naturale. Nel tentativo di fornire una definizione rigorosa di della nozione di numero, Frege scrive:

[p]er evitare che [...] si introducesse inavvertitamente alcunché di intuitivo, tutto doveva svolgersi senza la minima lacuna entro la catena deduttiva. Cercando di soddisfare nel modo più rigoroso a questa esigenza, incontrai un ostacolo nella inadeguatezza della lingua: infatti, malgrado la crescente pesantezza d'espressione, la lingua tanto meno mi permetteva di raggiungere quella precisione che il mio intento esigeva, quanto più complesse divenivano le relazioni.⁸

L'accento al rifiuto freghiano di utilizzare elementi intuitivi in ambito logico è importante, perché contribuisce a inquadrare la riconcettualizzazione delle categorie logiche menzionata nel titolo di questa sezione. L'atteggiamento di Frege si contrappone all'orientamento psicologista in voga nel XIX secolo. Secondo lo psicologismo la logica,

⁷ Da questo punto di vista, è bene precisare che, secondo Frege, i pensieri non sono rappresentazioni mentali più o meno articolate. Essi sono entità astratte espresse da enunciati, indipendenti dalla nostra attività psichica e dunque oggettivi, dotati di una struttura logica più o meno complessa e di valore di verità. Secondo Frege, dunque, la logica studia le connessioni logiche fra queste entità.

⁸ Frege [1879]: 104.

essendo scienza del ragionamento, va intesa come una branca della psicologia. Secondo Frege, invece, quest'ultima va distinta nettamente dalla logica, poiché, mentre la logica è la scienza della verità e della generalità, la psicologia è studio delle rappresentazioni mentali, che in quanto tali sono solipsistiche e non possono quindi garantire generalità alle verità della logica. Ad esempio, la mia rappresentazione mentale della luna è chiaramente diversa dalla rappresentazione che della luna ha il mio vicino di casa, per il fatto che le nostre rispettive rappresentazioni mentali sono private. Ora, una analisi in termini psicologici delle verità della logica porterebbe a dover rigettare come quanto meno contingenti verità che ci appaiono necessarie. Si consideri, a titolo di esempio, l'enunciato "Luna = Luna".⁹ Questa è una istanza della legge di identità " $a=a$ " e, dunque, è necessariamente vera. Tuttavia, sulla scorta dell'analisi psicologista, possiamo affermare che "Luna = Luna" è vero solo se le due occorrenze del termine "Luna" si riferiscono alla medesima rappresentazione mentale. È quindi ovvio che, considerando la mia rappresentazione mentale della Luna e quella del mio vicino di casa, l'enunciato "Luna=Luna" risulti falso, in quanto, poiché ogni rappresentazione pertiene al suo portatore, la mia rappresentazione della Luna è necessariamente diversa dalla rappresentazione che della Luna ha il mio vicino di casa.¹⁰

È chiaro, dunque, che, se intende fondare la matematica su basi solide, Frege deve evitare le oscurità del linguaggio naturale e i tranelli dello psicologismo. Dall'inadeguatezza del

⁹ Sottintendo con "Luna" il satellite del pianeta Terra.

¹⁰ Cfr. Frege [1988] 59: "Ritorno alla questione: il pensiero è una rappresentazione? Se il pensiero che articola nel teorema di Pitagora può essere riconosciuto vero tanto dagli altri che da me, non appartiene allora al contenuto della mia coscienza, e quindi non ne sono il portatore: posso tuttavia riconoscerlo come vero. Ma se non fosse proprio per niente lo stesso pensiero quello che viene considerato da me e dagli altri come contenuto nel teorema di Pitagora, non si dovrebbe in senso proprio dire «il teorema di Pitagora» ma «il mio teorema di Pitagora», «il suo teorema di Pitagora», e questi sarebbero differenti [...]. Quindi il mio pensiero sarebbe un contenuto della mia coscienza, e il pensiero d'un altro un contenuto della sua.[...] [I]e parole «vero» e «falso», per come le intendo, potrebbero essere applicabili solo nell'ambito della mia coscienza se, invece di concernere qualcosa di cui non sono il portatore, fossero destinate a caratterizzare in qualche modo i contenuti della mia coscienza. E in conseguenza di ciò la verità sarebbe limitata al contenuto della mia coscienza e resterebbe il dubbio se qualcosa di simile si presenti mai nella coscienza degli altri".

linguaggio naturale nella corretta analisi delle relazioni logiche che intervengono nelle dimostrazioni matematiche e dalla possibilità che il nostro ragionamento sia inficiato dall'introduzione surrettizia di elementi psicologici, nasce così l'esigenza di costruire un linguaggio formale, privo di ambiguità, e generalissimo,¹¹ atto cioè a incamerare e tradurre, rendendolo rigoroso, qualsiasi frammento linguistico. Questo è lo scopo della *Ideografia*, un libello di un'ottantina di pagine che, benché accolto nell'indifferenza pressoché generale della comunità scientifica dell'epoca o addirittura nello sfavore di alcuni suoi rappresentanti,¹² sancisce l'atto di nascita della logica contemporanea. In essa, Frege presenta il primo sistema formale della logica dei predicati della storia della logica.¹³ La logica proposizionale e la logica dei predicati ottengono nell'*Ideografia* la prima sistematizzazione rigorosa; in essa viene introdotta la teoria della quantificazione così come la conosciamo oggi, benché in una notazione diversa; in essa la tradizionale dicotomia aristotelica soggetto-predicato, ancora standard fra i logici di fine Ottocento, viene capovolta e ripensata. È un dato di fatto che le innovazioni introdotte dall'*Ideografia* siano epocali.

4.1 LA DICOTOMIA FUNZIONE-ARGOMENTO E L'INTRODUZIONE DEI QUANTIFICATORI

L'*Ideografia* freghiana rappresenta un punto di svolta fondamentale nella storia della logica. In essa, infatti, Frege scardina il paradigma logico aristotelico in voga fino alla fine del XIX secolo. Questa rivoluzione concettuale si palesa in alcune innovazioni, come accen-

¹¹ In questo senso, Frege riprende l'ideale leibniziano della "characteristica universalis".

¹² Questa fu solo una delle mortificazioni subite da Frege a opera dei suoi contemporanei. Segno dell'amarezza e dell'exasperazione che questo atteggiamento aveva lasciato in Frege è la causticità con cui egli tratta, specialmente nei *Principi dell'aritmetica*, il lavoro altrui da lui giudicato insufficiente.

¹³ A dire il vero, la notazione ideografica è decisamente poco maneggevole e piuttosto ingombrante, rispetto alle notazioni standard cui siamo ormai abituati. Tuttavia, benché non sia mai stata usata se non da Frege, il linguaggio che essa esprime costituisce un punto di volta teorico estremamente importante, che sarà di grande influenza sugli sviluppi della logica contemporanea.

navo in conclusione del paragrafo precedente. Esse risolvono alcuni dei difetti fondamentali dell'analisi logica aristotelica.¹⁴ In questa sede, accennerò a tali difetti in relazione alle innovazioni freghiane fondamentali: la dicotomia funzione-argomento e l'introduzione dei quantificatori.

La logica aristotelica ruota attorno all'analisi dei *sillogismi*, cioè delle deduzioni di conclusioni da premesse. Un esempio classico di sillogismo è il seguente:

(Premessa maggiore) Tutti gli uomini sono mortali;

(Premessa minore) Socrate è un uomo;

(Conclusione) Socrate è mortale.

Secondo Aristotele, gli enunciati che compaiono nei sillogismi devono avere tutti la medesima struttura: devono contenere un *soggetto*, rappresentato da un termine particolare, ad esempio "Socrate", o universale, ad esempio "umano", e un *predicato*, che non può che essere un universale. Nella Premessa minore, ad esempio, il soggetto è il termine individuale "Socrate", mentre il predicato è "è un uomo". Questa analisi, tuttavia, soffre di alcuni difetti. Innanzitutto, riducendo la forma logica alla forma grammaticale, l'analisi aristotelica induce un appiattimento di quelle che oggi chiameremmo le relazioni logiche sulle relazioni grammaticali fra enunciati. Si considerino i due seguenti enunciati:

(A) Piero ama Maria;

(B) Maria è amata da Piero.

¹⁴ Per una panoramica generale dei limiti della logica aristotelica in relazione a quella freghiana, cfr. Mariani [2004]: 3 e segg.

L'analisi aristotelica analizza gli enunciati (A) e (B) come segue: in (A), il soggetto è Piero, mentre il predicato è "ama Maria"; nel caso di (B), invece, il soggetto è Maria, mentre il predicato è "è amata da Piero". In forza del fatto che (A) e (B) hanno, secondo la logica tradizionale, una struttura diversa, essi sono enunciati diversi. Questo è, in un certo senso, evidente. Tuttavia, conseguenza di questo approccio è che (A) e (B) abbiano conseguenze logiche distinte, mentre tutto ciò che segue da (A) segue da (B) e viceversa. In particolare, (A) segue da (B) e viceversa.¹⁵ La distinzione soggetto-predicato, inoltre, non utilizza predicati relazionali. Ad esempio, l'enunciato

(C) 4 è maggiore di 3

in termini aristotelici viene tradotto con " a è F ", dove " a " sta per il soggetto "4" e " F " sta per il predicato "è maggiore di 3". Un ulteriore difetto dell'analisi aristotelica sta nel fatto che essa non è in grado di rendere conto della funzione logica dei quantificatori, cioè delle espressioni quali "tutti", "qualche" o "nessuno", a meno che non si trovino in posizione di soggetto. Consideriamo l'enunciato

(D) Tutte le ragazze amano qualche marinaio.

¹⁵ Oggi si dice che (A) e (B) sono logicamente equivalenti.

L'analisi aristotelica ci costringe a trattare il predicato “amano qualche marinaio” come una unità. In termini aristotelici, (D) viene quindi tradotto “tutte le *A* sono *F*”, che non sembra essere quello che dice (D).

Tutti questi difetti, secondo Frege, sono imputabili al fatto che la logica tradizionale si fonda sulla dicotomia soggetto-predicato. Il caso degli enunciati (A) e (B) è particolarmente eloquente. Essi, infatti, sembrano esprimere il medesimo stato di cose, palesato dal sentimento di amore che lega Piero a Maria, eppure la logica tradizionale trascura questa identità di contenuto. Allo scopo, quindi, di rendere conto correttamente del contenuto e della struttura logica degli enunciati, Frege propone di sostituire alla dicotomia soggetto-predicato la dicotomia *funzione-argomento*, che egli recupera dalla matematica e amplia. Consideriamo l'enunciato

1. $2+3=5$

e consideriamo innanzitutto l'espressione “ $2+3$ ”. Essa può essere scomposta nella funzione a due argomenti “ $() + ()$ ”, dove le parentesi tonde segnano posti vuoti che vengono occupati rispettivamente dall'argomento “2” e dall'argomento “3”. La funzione “+” applicata a due argomenti arbitrari, dunque, avrà come valore un numero naturale, nel nostro esempio 5. Consideriamo ora l'intero enunciato (1). Esso va letto come l'applicazione di una funzione a tre argomenti, che assume come valore un valore di verità, cioè il Vero o il Falso. (1) viene quindi scomposto nella funzione “ $() + () = ()$ ”, in cui i posti vuoti siano occupati da termini appropriati. Tale funzione, una volta che i suoi posti vuoti siano occupati da argomenti, Frege direbbe “una volta saturata”, assume come valore un valore di verità, os-

sia il Vero oppure il Falso.¹⁶ Così, se saturiamo la funzione “() + () = ()” con i termini “2”, “3” e “5”, il valore di questo enunciato sarà il Vero; se, invece, la saturiamo con i termini “2”, “3”, e “4”, il valore che la funzione assume per questi argomenti sarà il Falso. Ora, si applichi il medesimo procedimento all’enunciato

2. Piero è bello.

Secondo Frege, (2) va scomposto nella funzione “() è bello”, applicata all’argomento “Piero”. Anche nel caso di (2), il valore associato all’argomento “Piero” dalla funzione “() è bello” è un valore di verità. Le funzioni che associano a degli argomenti un valore di verità sono dette da Frege *concetti*. Consideriamo nuovamente l’enunciato

(A) Piero ama Maria.

Secondo la proposta freghiana, (A) può essere analizzato in tre modi diversi:

(A') () ama Maria;

(A") Piero ama ();

(A''') () ama ().

Nella scomposizione (A''') abbiamo ottenuto il predicato “() ama ()” elidendo entrambi gli argomenti “Piero” e “Maria”, ottenendo così un predicato a due posti, ossia un predicato

¹⁶ Un argomento, al contrario, è un’entità “satura”, auto-sussistente, che non necessita di essere completata in alcun modo.

relazionale. Grazie all'uso della nozione di relazione, Frege riesce così a ovviare anche al secondo problema della logica aristotelica, quello cioè di non riuscire a rendere conto degli enunciati relazionali.¹⁷

L'ulteriore innovazione freghiana che intendo esporre sta nell'introduzione dei *quantificatori*. Nella logica aristotelica, i quantificatori come, ad esempio, "tutti", "qualche", "molti" o "nessuno", sono espressioni sincategorematiche che assumono significato solo nel momento in cui sono affiancate a universali, per esempio come nell'espressione "tutti gli uomini". Nell'*Ideografia*, Frege introduce il simbolo " \forall " per il quantificatore universale "tutti".¹⁸ Consideriamo nuovamente l'enunciato (2). L'analisi freghiana ci dice che questo enunciato va scomposto nel concetto "() è bello" e nell'argomento "Piero" e che, assumendo che l'enunciato sia vero, il concetto "() è bello" applicato all'argomento "Piero" prende come valore il Vero. La formula

3. $(\forall x) (x \text{ è bello})$

ci dice che, qualsiasi sia l'argomento considerato, il concetto "() è bello" assume sempre come valore il Vero, assumendo che (3) sia vero.¹⁹ In Frege, anche i quantificatori sono funzioni. Consideriamo di nuovo l'enunciato (3). Se consideriamo sostituibile il predicato

¹⁷ A onor del vero, una logica delle relazioni fu sistematizzata prima di Frege, da Augustus De Morgan, Charles Sanders Peirce ed Ernst Schröder. Cfr. Kneale & Kneale [1972]: cap. 5.

¹⁸ Il simbolo " \exists ", corrispondente al quantificatore "qualche", è ottenuto per definizione attraverso il quantificatore universale. Se infatti consideriamo il significato di un enunciato come, ad esempio, "qualche uomo è biondo", notiamo che esso è vero se c'è almeno un uomo biondo. Poiché l'esistenza di almeno un uomo biondo implica che non tutti gli uomini non siano biondi e viceversa, vediamo che l'enunciato in questione equivale a "non tutti gli uomini non sono biondi". Così, il quantificatore esistenziale può essere definito attraverso la negazione "non" e il quantificatore universale "tutti": qualche x è $F \equiv_{\text{def}}$ non tutti gli x sono F .

¹⁹ Si noti che la proposta freghiana risolve il problema della logica aristotelica di come rendere una quantificazione interna a un predicato.

“() è bello” secondo il metodo freghiano di scomposizione degli enunciati in funzione e argomento, quello che di (3) rimane è $(\forall x) (x ())$, dove le due parentesi a destra della x segnano, naturalmente, un posto che va saturato. Poiché “() è bello” è esso stesso un predicato che denota un concetto, cioè un tipo particolare di funzione, $(\forall x) (x ())$ sarà una funzione di funzioni.

Le nozioni di funzione e argomento sono introdotte senza ulteriori spiegazioni nell’*Ideografia*, ma sono oggetto di una approfondita analisi nei saggi *Funzione e concetto* e *Concetto e oggetto*. Nel primo di questi scritti, Frege spiega la distinzione fra funzione e concetto. Se da un lato è vero che tutte le funzioni, quindi anche i concetti, sono entità saturabili, dall’altro, mentre i concetti prendono come valore sempre un valore di verità, le funzioni, una volta saturate, possono prendere come valori entità che non sono valori di verità. Non tutte le funzioni, quindi, sono concetti. Ad esempio, la funzione “la capitale della ()”, una volta saturata con un argomento, ad esempio “Svezia”, prende come valore Stoccolma. Mentre, inoltre, i concetti prendono come argomenti sempre degli oggetti, le funzioni possono prendere come argomenti delle altre funzioni. È questo il caso, ad esempio, dei quantificatori, che sono definiti da Frege come funzioni di secondo livello, cioè come funzioni di funzioni, che prendono come argomenti funzioni di primo livello, cioè funzioni di argomenti.

La nozione di oggetto e la sua relazione con la nozione di concetto sono analizzate in *Concetto e oggetto*. Tuttavia, la nozione di oggetto è primitiva e come tale non può essere ulteriormente definita. L’unico modo di distinguere fra un concetto e un oggetto sta nella possibile interazione sintattica fra le espressioni che li denotano, rispettivamente un predicato e un termine: un concetto ha sempre necessità di essere saturato opportunamente per pro-

durre un enunciato; un oggetto è un'entità auto-sussistente che satura un concetto per produrre un enunciato. Si noti che Frege intende fornire un'analisi logica del linguaggio quanto più possibile omogenea: gli enunciati stessi sono considerati da Frege come termini, in particolare essi sono nomi di valori di verità. Contrariamente a quanto facciamo oggi grazie alla semantica modellistica per i linguaggi formali secondo cui, semplificando, la verità si *predica* delle formule di tali linguaggi,²⁰ il Vero e il Falso in Frege sono *oggetti*, denotati dagli enunciati.

La distinzione saturo-insaturo, abbiamo visto, pervade tutta l'analisi freghiana del linguaggio. In sostanza, tutte le espressioni del linguaggio sono sature ovvero insature. Da un lato, nomi propri semplici (e.g. "2") e complessi (e.g. "2+3"), descrizioni definite ("Il presidente della Repubblica"),²¹ enunciati ("Giorgio Napolitano è il presidente della Repubblica"), sono tutti espressioni sature, che in quanto tali non necessitano di essere completate ma denotano oggetti auto-sussistenti. Dall'altro, funzioni e concetti sono espressioni insature che richiedono di essere completate per avere un valore.

4.2 SENSO E RIFERIMENTO

In *Funzione e concetto*, Frege propone anche una riflessione sulla *funzione di identità* carica di conseguenze. Nell'introduzione dicevo che Frege è considerato uno dei fondatori della filosofia analitica. La sua ricerca non solo è stata di estrema importanza per lo sviluppo della logica contemporanea e della logica matematica, ma egli ha inaugurato nuovi orientamenti filosofici, in particolare la filosofia della matematica, intesa come ricerca sui fondamenti, e la filosofia del linguaggio. Non è un caso, quindi, che qualsiasi corso di intro-

²⁰ Per una introduzione alla semantica modellistica classica, cfr. Rogers [1978]: capp. terzo e quarto.

²¹ Fra cui il Vero e il Falso.

duzione alla filosofia del linguaggio parta da, o quanto meno abbia nel suo sillabo, *Senso e denotazione*.²² In questa sede, mi limiterò a mostrare quali siano le considerazioni che portano allo sviluppo delle tesi di *Senso e denotazione*, considerazioni che sono di estrema importanza per l'impianto logicista freghiano.

Sin dalla *Ideografia*, Frege mostra uno spiccato interesse per la questione dello statuto degli enunciati di identità. Si considerino ad esempio gli enunciati

4. $2+2=4$

e

5. $4=4$.

Entrambi questi enunciati denotano il Vero e, tuttavia, sembrano avere una diversa portata: dove (4) è evidentemente informativo, (5) non lo è. Posto che Frege interpreta il simbolo “=” come identità, i termini ai suoi estremi in (4) denotano necessariamente lo stesso oggetto (banalmente, lo stesso vale per (5)) e, tuttavia, l'evidente differenza fra i termini “2+2” e “4” ci fa rendere conto che in qualche misura “2+2” e “4” e, conseguentemente, (4) e (5) devono essere diversi. Del resto, se (4) ci dice qualcosa degli oggetti denotati da “2+2” e “4”, in verità ci sta fornendo un'informazione relativa a un oggetto solo: non avrebbe senso dire che *due* oggetti 2+2 e 4 sono *lo stesso* oggetto. La paradossalità di questa considerazione sembrerebbe risolvibile come segue: “2+2” e “4”, e conseguentemente (4) e

²² Per una trattazione esaustiva di questo argomento cfr. Tripodi [2010b].

(5), sono *nomi* diversi per il medesimo oggetto. Tuttavia, ciò implicherebbe che (4) e (5) predichino l'identità di nomi, non l'identità di oggetti, mentre è esattamente quest'ultima che sembra in gioco.

Dalla considerazione di questo *impasse* fra segno e significato, nasce la distinzione freghiana fra *senso* e *riferimento*, introdotta in *Funzione e concetto* e ampiamente analizzata da Frege in *Senso e denotazione*. Il *riferimento* di un termine è ciò che è denotato dal termine. Il *senso* di un termine è il *modo di presentazione*, diremmo con un'espressione attuale, vale a dire il modo in cui il riferimento ci viene dato. Per citare un esempio classico, si può dire che "Aristotele" si riferisce ad Aristotele e ha come senso, ad esempio, "il maestro di Alessandro Magno".²³ Tale distinzione permette a Frege di spiegare il funzionamento della funzione di identità e, soprattutto, di fugare quei dubbi di irragionevolezza che potevano sorgere dalla sua proposta di lettura omogenea delle componenti del linguaggio, cioè la distinzione pervasiva fra funzione e argomento. Una giustificazione della omogeneità di trattamento delle categorie sintattiche freghiane è essenziale per la sensatezza del programma logicista, soprattutto in quanto esso si basa sull'analisi degli enunciati di identità numerica.²⁴

5. I FONDAMENTI DELL'ARITMETICA

A questo punto, Frege può procedere ad affrontare la questione fondamentale che motiva la sua intera ricerca: la questione fondazionale della natura dei numeri. A questa domanda Frege dedica i suoi *Fondamenti dell'aritmetica*, definito da Dummett «il primo lavoro di

²³ Benché sia da Frege esplicitamente affermato che il riferimento di un predicato è o un concetto ovvero una funzione, è questione spinosissima quale ne sia il senso. Per una discussione esaustiva in merito, rimando a Kenny [2003]: cap. VI. Naturalmente, anche gli enunciati hanno riferimento, cioè il Vero o il Falso, e almeno un senso, vale a dire un pensiero.

²⁴ Nonostante i *Fondamenti* precedano *Senso e denotazione* di circa otto anni.

filosofia analitica» (Frege [1923]: 33). Questa convinzione, indubbiamente corretta, nasce dall'approccio freghiano alla domanda sulla natura dei numeri. Tale approccio, giustificato dalla volontà di Frege di sgombrare il campo dagli equivoci sia filosofici sia matematici relativi alle definizioni dei numeri fornite da studiosi a lui precedenti o contemporanei, spinge Frege a enunciare già nell'introduzione dei *Fondamenti* i principi che lo guideranno nella sua trattazione e a motivarli coerentemente:

- (i) separare nettamente lo psicologico dal logico, il soggettivo dall'oggettivo;
- (ii) cercare il significato delle parole, considerandole non isolatamente ma nei loro nessi reciproci;
- (iii) tenere presente in ogni caso la differenza fra oggetto e concetto.²⁵

Tutti e tre questi punti rappresentano posizioni cardine dell'approccio filosofico freghiano generale: lo svincolamento della logica dalla psicologia e dunque di ciò che è oggettivo – il pensiero – dalla mera soggettività della rappresentazione dei singoli; la centralità dell'analisi degli enunciati matematici; e infine l'importanza della riconcettualizzazione delle categorie logiche aristoteliche in termini di funzione e argomento, che permette di epurare completamente il discorso logico e matematico da elementi psicologici. Tutto ciò, in particolare il punto b), il cosiddetto *Principio del Contesto*, contribuisce a inaugurare l'orientamento filosofico-analitico: a)-c) riassumono la cosiddetta *svolta linguistica*.²⁶

I *Fondamenti* si possono suddividere in due parti fondamentali. Nella prima, la *pars destruens*, Frege, con estremo vigore e precisione intellettuali, si confronta con le visioni concorrenti relativamente alla natura dei numeri e allo statuto degli enunciati matematici.

²⁵ Frege [1884]: 219, trad. parz. modif.

²⁶ Con "svolta linguistica" si intende l'inaugurazione della prospettiva secondo la quale "una spiegazione filosofica del pensiero è conseguibile attraverso una spiegazione filosofica del linguaggio" (Dummett [2001]: 13, trad. parz. modif.) (cfr. Tripodi [2010b]: § 2). La svolta linguistica rappresenta l'atto di nascita della filosofia analitica (cfr. Frege [1988]: 33).

In particolare, egli contrappone alla visione kantiana e a quella milliana, secondo cui gli enunciati matematici sono, rispettivamente, sintetici a priori e empirici a posteriori, la considerazione degli enunciati matematici come analitici a priori.²⁷ Le tradizioni con cui Frege si confronta e che riguardano invece la natura dei numeri sono essenzialmente tre: l'empirismo (Mill) secondo cui i numeri sono proprietà degli oggetti concreti; lo psicologismo (Lipschitz) secondo cui i numeri sono rappresentazioni mentali; il formalismo (Thomae) secondo cui i numeri sono segni privi di contenuto.

Una volta confutate le teorie concorrenti, Frege procede, nella seconda parte dei *Fondamenti* - la *pars construens* - a una analisi positiva della natura dei numeri e a una loro definizione rigorosa. Frege prende spunto dal principio b), enunciato nella introduzione dei *Fondamenti*. Per evitare, cioè, che il suo approccio possa contenere le stesse imprecisioni o errori degli approcci presentati nella *pars destruens*, Frege applica il Principio del Contesto al procedere della sua analisi. In questo senso, è ovvio che Frege prenda le mosse, nella determinazione della natura dei numeri, da enunciati numerici, in particolare dagli enunciati di identità fra numeri. Egli, innanzitutto, considera gli enunciati della forma

6. Gli F sono n ,

dove F sta per un concetto sortale, vale a dire un concetto tale che, se gli oggetti a e b cadono sotto F , allora siamo in grado di stabilire se a e b siano o meno lo stesso oggetto; e n sta per un numero. Ora, qual è il contenuto di tale enunciato? In altre parole, quando facciamo asserzioni numeriche, attorno a cosa le facciamo? Il contenuto di asserzioni quali

²⁷ Punto del resto fondamentale, se si vuole asserire che gli enunciati matematici siano verità logiche.

(6), secondo Frege, è che sotto al concetto F cade un numero n di oggetti.²⁸ Il modo in cui l'enunciato (6) è formulato, tuttavia, non deve trarre in inganno: non stiamo predicando l'essere n di certi oggetti F . Questa è la lettura che ne dà l'analisi di stampo aristotelico. Secondo l'analisi freghiana, invece, n è un termine singolare. In quanto tale, esso non può comparire come predicato, ma deve essere riconosciuto in quanto argomento di qualche funzione. Alla luce della distinzione fra funzione e argomento, l'enunciato (6) viene letto come un'identità numerica:

(6') Il numero degli $F = n$.²⁹

In questo senso, si vede quale sia la più naturale applicazione del Principio del Contesto nei *Fondamenti*. Innanzitutto, Frege individua una classe di enunciati, quelli di identità fra numeri, che abbiano la struttura appropriata.³⁰ Applicando a tale classe il Principio del Contesto siamo in grado di rinvenire il significato e, dunque, di procedere alla definizione delle espressioni componenti. Gli enunciati adatti allo scopo sono gli enunciati della forma

7. Il numero che spetta al concetto $F =$ il numero che spetta al concetto G ,

per qualche F e G . Conseguentemente a questa intuizione, al § 63 dei *Fondamenti*, Frege prende spunto da un suggerimento di Hume secondo cui “Se due numeri si trovano combi-

²⁸ Frege utilizza l'espressione “al concetto F spetta il numero n ”.

²⁹ Naturalmente, questa non è l'unica lettura possibile. Infatti, potremmo anche utilizzare dei *quantificatori numerici* che esprimono il fatto che gli F sono in numero n : $\exists_n x Fx$, che si legge “ci sono n oggetti che sono F ”. Tuttavia, non è questa la lettura che Frege vuole, perché il suo scopo è fornire un'analisi rigorosa degli enunciati di identità numerica in base alla distinzione fondamentale fra funzione e argomento.

³⁰ E cioè contengono le espressioni che vogliamo definire.

nati fra loro, in modo che a ogni unità dell'uno corrisponda sempre un'unità dell'altro, allora affermiamo che essi sono uguali". Questo principio, che poi George Boolos battezzerà *Principio di Hume*, viene presentato in termini discorsivi da Frege. È tuttavia possibile fornire una versione formale, in cui si utilizza la relazione di *equinumerosità*,³¹ corrispondente all'antecedente del summenzionato condizionale humiano e definibile esclusivamente in termini della attuale logica del secondo ordine.³²

Tuttavia, pensare di fornire una definizione di numero attraverso il Principio di Hume apre un problema spinoso, tale che Frege deve abbandonare questa ipotesi definitoria. Prendendo le mosse dal celebre esempio della definizione di retta parallela ai §§ 64-67,³³ Frege mostra come sia la definizione di parallelismo sia il Principio di Hume non siano in grado di determinare il valore di verità di tutte le proprie istanze. Limitiamoci a considerare il Principio di Hume e consideriamo l'enunciato di identità della forma "il numero degli $F=q$ ". Nel caso in cui q non sia un termine per un numero, ma sia un termine per un altro tipo di oggetto, ad esempio Giulio Cesare, l'asse terrestre, la Giustizia o il colore rosso, il Principio di Hume non può determinare il valore di verità dell'enunciato "il numero degli $F=q$ ". Questo è il cosiddetto *problema di Giulio Cesare* (si veda Frege [1884]: § 66).

È dunque necessario fornire una *definizione esplicita* di numero che sia in grado di ovviare anche al problema di Giulio Cesare. Il § 68 è il paragrafo decisivo in tal senso. In esso, Frege introduce la nozione di *estensione di un concetto*. L'estensione di un concetto è la

³¹ I concetti F e G sono equinumerosi se è possibile mettere gli oggetti che cadono sotto F in corrispondenza biunivoca con gli oggetti che cadono sotto G .

³² Molto in generale, possiamo limitarci a dire che la logica dei predicati del secondo ordine è una logica in cui si quantifica su due tipi di variabili: le variabili del primo ordine x, y, z, \dots , che variano su individui del dominio del primo ordine; e variabili del secondo ordine X, Y, Z, \dots , che variano sul dominio delle classi degli individui del primo ordine. Cfr. Rogers [1978]: cap. quarto.

³³ "Stabiliamo che la proposizione 'La retta a è parallela alla retta b ' venga considerata come equivalente a quest'altra: 'La direzione della retta a è uguale alla direzione della retta b '" (Frege [1884]: § 65).

classe di tutti gli oggetti che cadono sotto quel concetto.³⁴ Le estensioni di concetti sono dunque utilizzate da Frege per fornire una definizione esplicita di numero naturale. A tale scopo, risulta utile utilizzare la nozione di equinumerosità, già utilizzata per formulare il Principio di Hume:

8. Il numero degli $F =_{\text{def}}$ l'estensione che contiene le estensioni di tutti i concetti equinumerosi a F .

Grazie a (8), Frege è in grado di definire i cardinali finiti a partire dallo zero. Grazie alla definizione di *predecessore immediato*, fornita a partire dalla *relazione di ancestrale* definita nella *Ideografia*, Frege è in grado di dimostrare che, a partire dalla definizione di zero, possono essere definiti tutti gli infiniti numeri naturali, e la stessa nozione di Numero.

Si noti che (8) risolve il problema di Giulio Cesare solo nel caso in cui ci sia modo di dimostrare che Giulio Cesare non è un'estensione.³⁵ Frege fiduciosamente scrive in una nota del § 68 che egli presuppone si sappia cosa sia un'estensione (Frege [1884]: 306), probabilmente riferendosi alla nozione di estensione che era pienamente accettata all'epoca (Panza & Sereni [2010]: 77). Ciò chiaramente risolve il problema di Giulio Cesare solo nel caso in cui la nozione tradizionale di estensione cui probabilmente fa riferimento Frege in quella nota sia definita con sufficiente rigore.

³⁴ La nozione di estensione è derivata dalla nozione di *decorso di valori* di una funzione (cfr. in particolare *Funzione e concetto*). Il decorso di valori di una funzione f è la classe di tutte le coppie ordinate contenenti come primo termine una n -upla di argomenti e come secondo termine un valore per quegli argomenti. Analogamente, l'estensione di un concetto è la classe che contiene tutte le coppie ordinate contenenti una n -upla di argomenti e, come secondo termine, un valore di verità. È tuttavia probabile che nei *Fondamenti* Frege faccia implicitamente riferimento alla nozione di estensione in voga fra i logici dell'epoca, i.e., come classe di tutti gli oggetti che cadono sotto a un concetto (cfr. Kenny 2003: 117).

³⁵ D'ora in poi, quando parlerò di estensioni sarà sottinteso che si tratti di estensioni di concetti.

La nozione di estensione, tuttavia, non ha la mera valenza di risolvere il problema di Giulio Cesare. Essa può essere considerata il punto di raccordo del programma logicista freghiano, la nozione che connette la logica freghiana con il progetto fondazionale logicista. Il punto di raccordo fra matematica e logica freghiana, per quanto riguarda la natura delle entità matematiche, è fornito proprio dall'introduzione delle estensioni, perché le estensioni sono determinate a partire dai concetti.³⁶ Grazie a questa relazione di dipendenza logica delle estensioni dai concetti, le estensioni ereditano la logicità della loro natura dai concetti stessi. Definendo quindi i numeri come estensioni di un certo genere, Frege non fa altro che assicurare natura logica ai numeri.

6. I PRINCIPI DELL'ARITMETICA

A questo punto, Frege ritiene di aver gettato le basi teoriche per l'effettiva derivazione dell'aritmetica dalla logica. I *Principi dell'aritmetica* contengono la formalizzazione rigorosa del suo logicismo. Tuttavia, proprio l'introduzione della nozione di estensione determina il fallimento del programma freghiano. Infatti, affinché l'aritmetica sia derivata a pieno dalla logica freghiana e, quindi, i numeri naturali siano definiti come estensioni, Frege deve presupporre che a ogni concetto corrisponda l'estensione degli oggetti che cadono sotto di esso. Questa assunzione produce una contraddizione passata alla storia della logica matematica come *antinomia di Russell*. Ma procediamo per gradi.

Il sistema dei *Principi* è una logica dei predicati che comprende tra i suoi assiomi: gli assiomi della logica proposizionale e della teoria della quantificazione di ordine n ; gli assi-

³⁶ Si noti che tale determinazione non è di natura ontologica: le estensioni sono oggetti dati *a priori* nell'Universo del Discorso freghiano. Il senso in cui i concetti determinano le relative estensioni è prettamente logico.

mi che riguardano le estensioni di concetti, in particolare la cosiddetta *Legge V*. Essa, in verità, altro non è che un criterio di identità per estensioni: per ogni concetto F e G , l'estensione determinata da F è identica all'estensione determinata da G se, e solo se, F e G sono equivalenti, vale a dire sotto di entrambi cadono esattamente gli stessi oggetti. Tuttavia, nell'ontologia freghiana esistono *tutti* i concetti e, in conseguenza, tutte le estensioni a essi corrispondenti. Questo è il presupposto critico che determina il fallimento del programma logicista freghiano. Questa assunzione ontologica è espressa formalmente, nel sistema dei *Principi*, dalla cosiddetta *Regola di Sostituzione*: essa è equivalente al *Principio di Comprensione impredicativo*, secondo il quale per ogni proprietà esiste l'insieme degli oggetti che la soddisfano.

6.1 IL PARADOSSO DI RUSSELL

La contraddizione, rinvenuta da Bertrand Russell e comunicata a Frege in una lettera del giugno 1902, determina il crollo dell'edificio logicista freghiano. L'antinomia di Russell utilizza crucialmente la regola di sostituzione e si appoggia alla Legge V. Dato il concetto “() è l'estensione di tutte le estensioni che non sono elementi di se stesse” – chiamiamolo R –, ad esso corrisponde una estensione, cioè l'insieme degli y che sono R . Possiamo ora chiederci se tale estensione, in quanto oggetto genuino, cada o meno sotto il concetto R . Se essa cade sotto R , allora essa non è elemento di se stessa, cioè non cade sotto R . Se, d'altro canto, essa non cade sotto R , allora essa cade sotto R , in base alla definizione di R stesso. Quindi, l'estensione di R cade sotto R se, e solo se, essa non cade sotto R .

Frege viene informato della contraddizione da Bertrand Russell, con una lettera datata 16 giugno 1902,³⁷ mentre il secondo volume dei *Principi* è in corso di stampa. La reazione di Frege è immediata. In una lettera di pochi giorni dopo, si legge:

La Sua scoperta della contraddizione mi ha sorpreso al massimo e, quasi vorrei dire, mi ha costernato, perché con essa vacilla la base sulla quale pensavo di fondasse l'aritmetica.³⁸

Per capire la portata del rinvenimento, è necessario comprendere che esso dimostra che non solo il sistema dei *Principi* è inconsistente, ma soprattutto che la contraddizione dipende crucialmente da quella Legge V che, arricchita dall'assunzione della corrispondenza biunivoca fra concetti ed estensioni, funge da principio cardine del logicismo freghiano. La Legge V è infatti quel principio che connette strettamente i numeri, concepiti come classi di equivalenza, ai concetti, garantendone così la logicità.

In seguito, per ovviare alla contraddizione, Frege apporta una serie di modifiche alla Legge V, imputata della insorgenza dell'antinomia di Russell, e le inserisce in Appendice al secondo volume dei *Principi*, pubblicato nel 1903. Il sistema così modificato, tuttavia, perde quelle caratteristiche essenziali contenute nella versione originale, cosa che impedisce di derivare l'aritmetica di Peano.³⁹ A prescindere da ciò, il nuovo sistema è a sua volta incoerente.⁴⁰

³⁷ Cfr. Frege [1976]: 130-1.

³⁸ Frege [1983]: 185, lettera XV/2 [xxxvi/2], datata 22 giugno 1902.

³⁹ Cfr. Giaquinto [2004]: 56.

⁴⁰ Cfr. Burgess [2005]: cap. I, § 1.3: 32-33. Lesniewski, secondo Geach e Sobocinski, fu il primo a fornire l'argomento per la contraddittorietà del sistema revisionato di Frege, tuttavia non pubblicandolo.

7. L'ABBANDONO DEL LOGICISMO

Dato che il presupposto della corrispondenza fra concetti ed estensioni è fondamentale per il progetto freghiano, il logicismo riceve un colpo talmente duro dal rinvenimento dell'antinomia di Russell che, in ultima analisi, dopo aver tentato una serie di soluzioni alla contraddizione, tutte ritenute insoddisfacenti, Frege abbandona l'idea che le estensioni siano oggetti logici e che quindi l'aritmetica possa essere ridotta alla logica.

È nell'estate del 1906 che Frege inizia ad elaborare l'alternativa al suo stesso logicismo, in particolare a quella dottrina delle estensioni che tanto si era rivelata pernicioso. Con un lavoro lento ma costante, Frege giunge alla stesura nel 1923 del saggio *Le fonti conoscitive della matematica e delle scienze naturali matematiche*,⁴¹ in cui porta a compimento il totale ripudio del logicismo così come egli l'aveva partorito nei suoi scritti più significativi e viene suggellato il tentativo ultimo di fondare la matematica sulla geometria, segnando il ritorno di Frege ad una dottrina di maggiore ispirazione kantiana.⁴²

BIBLIOGRAFIA PRIMARIA

Frege G. (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formel-sprache des reinen Denkens*, Halle. Tr. It di L. Geymonat e C. Mangione (1965), *Ideografia, un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico*, in *Logica e aritmetica*, Bollati Boringhieri, Torino.

⁴¹ In Frege [1969].

⁴² Nonostante il fallimento del programma di fondazione della aritmetica su basi meramente logiche, Frege, negli ultimi anni della sua vita, dà alle stampe tre articoli che costituiscono le *Ricerche logiche: Il pensiero, La negazione, La connessione dei pensieri*. In essi Frege riprende il lavoro sulla logica che aveva abbandonato tempo prima per dedicarsi al progetto logicista. Parte di una probabile introduzione alla logica mai portata a termine, le *Ricerche* costituiscono un momento di sintesi e approfondimento delle innovazioni logiche freghiane. Si veda l'introduzione di Michael Dummett alla edizione italiana citata in bibliografia.

- Frege G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884. Tr. it. L. Geymonat e C. Mangione (1965), *I fondamenti dell'aritmetica. Un'indagine logico-matematica sul concetto di numero*, in *Logica e aritmetica*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Frege G. (1891), *Funktion und Begriff*, Conferenza tenuta il 9/1/1891 alla Jenaische Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft Jena. Tr. it. di C. Lazzerini (1970), *Funzione e concetto*, in *Ricerche logiche*, Calderoni, Bologna.
- Frege G. (1892a), “Über Sinn und Bedeutung“, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, C: 25-50. Tr. it. di L. Geymonat e C. Mangione (1965), “Senso e riferimento”, in *Logica e aritmetica*, Bollati Boringhieri, Torino; tr. it. di S. Zecchi (1973), “Senso e denotazione”, in *La struttura logica del linguaggio*, a cura di A. Bonomi, Bompiani, Milano.
- Frege G. (1892b), “Über Begriff und Gegenstand“, *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, XVI: 192-205. Tr. it. di L. Geymonat e C. Mangione (1965), “Concetto e oggetto”, in *Logica e aritmetica*, Bollati Boringhieri, Torino; tr. it. di S. Zecchi (1973), “Concetto e oggetto”, in *La struttura logica del linguaggio*, a cura di A. Bonomi, Bompiani, Milano.
- Frege G. (1893), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet I*, Jena, ristampa anastatica presso G. Olms, Hil-desheim 1966. Tr. it. (parziale) di L. Geymonat (1948), “I principi dell'aritmetica, derivati in forma ideografica”, in *Aritmetica e logica*, Einaudi, Torino, e in *Logica e aritmetica*, a cura di L. Geymonat e C. Mangione (1965), Bollati Boringhieri, Torino.
- Frege G. (1903), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet II*, Jena, ristampa anastatica presso G. Olms, Hil-desheim 1966. Tr. it. (parziale) di L. Geymonat (1948), “I

principi dell'aritmetica, derivati in forma ideografica”, in *Aritmetica e logica*, Einaudi, Torino, e in *Logica e aritmetica*, a cura di L. Geymonat e C. Mangione (1965), Bollati Boringhieri, Torino.

Frege G. (1918-1919a), “Der Gedanke. Eine logische Untersuchung,, *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, I: 58-77. Tr. it. di C. Lazzerini (1970), “Il pensiero. Una ricerca logica”, in *Ricerche logiche*, Calderoni, Bologna, e tr. it. di Roberto Casati (1988), “Il pensiero. Una ricerca logica”, in *Ricerche logiche*, a cura di M. Di Francesco, introduzione di Michael Dummett (tr. it. di Luca Monatti), Guerini, Milano.

Frege G. (1918-1919b), “Die Verneinung. Eine logische Untersuchung”, *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, I: 143-157. Tr. it. di C. Lazzerini (1970), “La negazione. Una ricerca logica”, in *Ricerche logiche*, Calderoni, Bologna, e tr. it. di Roberto Casati (1988), “La negazione. Una ricerca logica”, in *Ricerche logiche*, a cura di M. Di Francesco, introduzione di Michael Dummett (tr. it. di Luca Monatti), Guerini, Milano.

Frege G. (1923), “Logische Untersuchungen. Drittel Teil: Gedankengefüge“, *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, III: 36-51. Tr. it. di C. Lazzerini (1970), “Le connessioni dei pensieri. Ricerche logiche. Terza parte”, in *Ricerche logiche*, Calderoni, Bologna, e tr. it. di Roberto Casati (1988), “Le connessioni dei pensieri. Ricerche logiche. Terza parte”, in *Ricerche logiche*, a cura di M. Di Francesco, introduzione di Michael Dummett (tr. it. di Luca Monatti), Guerini, Milano.

Frege G. (1969), *Nachgelassene Schriften*, a cura di H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach, Hamburg. Tr. it. di Eva Picardi (1986), *Scritti postumi*, Bibliopolis, Napoli.

Frege G. (1976), *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, a cura di G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, A. Veerart, Hamburg. Tr. it. di C. Mangione (1983), *Alle origini della nuova*

logica. Epistolario scientifico con Hilbert, Husserl, Peano, Russell, Vailati e altri, Bollati Boringhieri, Torino.

Frege G. (2004), *Frege's Lectures on Logic. Carnap's Student Notes, 1910-1914*. Tr. ing. di E. H. Reck and S. Awodey (a cura di), Open Court, Chicago e LaSalle.

BREVE BIBLIOGRAFIA SECONDARIA

Baker G. P., Hacker P. M. S. (1984), *Frege. Logical Excavations*, New York, Oxford University Press.

Beaney M., Reck E. (2005) (a cura di), *Gottlob Frege (Critical Assessments of Leading Philosophers)*, London, Routledge, quattro volumi.

Borga M., Palladino D. (1997), *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica del XX secolo*, Brescia, La Scuola.

Burgess J. P. (2005), *Fixing Frege*, Princeton, Princeton University Press, 2005.

Carnap R. (1931), "The Logicist Foundations of Mathematics", in Benacerraf P., Putnam H. (a cura di), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964; sec. ed. (con modifiche sostanziali), Cambridge, Cambridge University Press.

Casalegno P. (1997), *Filosofia del linguaggio*, Roma, La Nuova Italia Scientifica, 1997, Carocci, 1998, 1998², 2001⁴, 2003⁶.

Dummett M. (1973), *Frege. Philosophy of Language*, London, Duckworth. Tr. it. parz. di Carlo Penco, *Filosofia del linguaggio. Saggio su Frege*, Casale Monferrato, Marietti, 1983.

Dummett M. (1987), *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Harvard University Press.

- Dummett M. (1991), *Frege. Philosophy of Mathematics*, London, Duckworth.
- Dummett M. (1993), *Origins of Analytical Philosophy*, London, Duckworth. Tr. it. di E. Picardi (2001), *Le origini della filosofia analitica*, Torino, Einaudi.
- Dummett M. (1996), *Frege and Other Philosophers*, New York, Oxford University Press.
- Gottfried G., Kienzler W. (1994) (a cura di), “Gottlob Freges politisches Tagebuch“, *Deutsche Zeitschrift für Philosophie*, 42: 1057-98. Tr. in. di R. L. Mendelsohn (1996), “Diary: Written by Professor Dr. Gottlob Frege in the Time from 10 March to 9 April 1924”, *Inquiry*, 39: 303-342.
- Giaquinto M. (2004), *The Search for Certainty: A Philosophical Account of the Foundations of Mathematics*, New York, Oxford University Press.
- Haaparanta L., Hintikka J. (1986) (a cura di), *Frege Synthesized*, Dordrecht, Reidel.
- Kenny A. (1995), *Frege*, London, Penguin. Tr. it. di M. Mazzone (2003), *Frege. Un'introduzione*, Torino, Einaudi.
- Kneale W. C., Kneale M. (1962), *The Development of Logic*, Oxford, Clarendon Press. Tr. it di A. G. Conte e L. Cafiero (1972), *Storia della logica*, Torino, Einaudi.
- Mariani M. (2004), *Introduzione a Frege*, Roma-Bari, Laterza.
- Noonan H. W. (2001), *Frege. A Critical Introduction*, Polity.
- Panza M., Sereni A. (2010), *Il problema di Platone. Un'introduzione storica alla filosofia della matematica*, Roma, Carocci.
- Potter M., Ricketts T. (2010) (a cura di), *The Cambridge Companion to Frege*, Cambridge University Press.
- Rogers R. (1971), *Mathematical Logic and Formalized Theories*, North-Holland. Tr. it. di D. Silvestrini (1978), *Logica matematica e teorie formalizzate* Milano, Feltrinelli.

- Schirn M. (1997) (a cura di), *Frege: Importance and Legacy*, Berlino, de Gruyter.
- Sluga H. (1980), *Gottlob Frege*, Routledge & Kegan Paul, London.
- Trinchero M. (1967), *La filosofia dell'aritmetica di Gottlob Frege*, Torino, Giappichelli.
- Tripodi V. (2010a), "La svolta linguistica e le sue origini", in *Temi*, Aphex, all'indirizzo <http://www.aphex.it/index.php?Temi=557D0301220274032101727677>.
- Tripodi V. (2010b), "La distinzione fregeana tra Senso e Riferimento", in *Temi*, Aphex, all'indirizzo <http://www.aphex.it/index.php?Temi=557D0301220274032100727677>.
- Vassallo N. (2003) (a cura di), *La filosofia di Gottlob Frege*, Milano, Franco Angeli.
- Wright C. (1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen, Aberdeen University Press.
- Zalta E. (2008), "Gottlob Frege", in Stanford Encyclopedia of Philosophy, all'indirizzo <http://plato.stanford.edu/entries/frege/>.
- Zalta E. (2010), "Frege's Logic, Theorem, and Foundations of Arithmetic", in Stanford Encyclopedia of Philosophy, all'indirizzo <http://plato.stanford.edu/entries/frege-logic/>.

Aphex.it è un periodico elettronico, registrazione n/ ISSN 2036-9972. Il copyright degli articoli è libero. Chiunque può riprodurli. Unica condizione: mettere in evidenza che il testo riprodotto è tratto da www.aphex.it

Condizioni per riprodurre i materiali --> Tutti i materiali, i dati e le informazioni pubblicati all'interno di questo sito web sono "no copyright", nel senso che possono essere riprodotti, modificati, distribuiti, trasmessi, ripubblicati o in altro modo utilizzati, in tutto o in parte, senza il preventivo consenso di Aphex.it, a condizione che tali utilizzazioni avvengano per finalità di uso personale, studio, ricerca o comunque non commerciali e che sia citata la fonte attraverso la seguente dicitura, impressa in caratteri ben visibili: "www.aphex.it". Ove i materiali, dati o informazioni siano utilizzati in forma digitale, la citazione della fonte dovrà essere effettuata in modo da consentire un collegamento ipertestuale (link) alla home page www.aphex.it o alla pagina dalla quale i materiali, dati o informazioni sono tratti. In ogni caso, dell'avvenuta riproduzione, in forma analogica o digitale, dei materiali tratti da www.aphex.it dovrà essere data tempestiva comunicazione al seguente indirizzo (redazione@aphex.it), allegando, laddove possibile, copia elettronica dell'articolo in cui i materiali sono stati riprodotti.

In caso di citazione su materiale cartaceo è possibile citare il materiale pubblicato su Aphex.it come una rivista cartacea, indicando il numero in cui è stato pubblicato l'articolo e l'anno di pubblicazione riportato anche nell'intestazione del pdf. Esempio: Autore, *Titolo*, <<www.aphex.it>>, 1 (2010).
