APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK
N°2 GIUGNO 2010

P R O F I L I

GEORGE BOOLE

di Andrea Pedeferri

ABSTRACT – *George Boole fu un matematico inglese che può essere considerato uno dei fondatori della logica moderna. Boole trasferì i metodi della ricerca algebrica alla logica creando in questo modo un linguaggio attraverso il quale costruire algoritmi applicabili a una generalità infinita di argomenti. Questo passo permise di superare l'impostazione tradizionale aristotelica e aprì le porte alla nascita della logica moderna e delle sue successive diramazioni. Il particolare tipo di algebra sviluppato da Boole sarà poi fondamentale come base per lo sviluppo dell'informatica e dei calcolatori.*

Verso la fine del 1700 si assiste a un graduale cambiamento di prospettiva nell'ambito della matematica. Se il diciottesimo secolo era stato dominato dai grandi sviluppi dell'analisi che avevano quasi monopolizzato la disciplina, già verso fine secolo, ma soprattutto all'inizio dell'ottocento, si assiste a una sempre maggiore attenzione agli aspetti riguardanti la giustificazione e la riflessione sui fondamenti della disciplina stessa. In questo contesto nasce una nuova considerazione del concetto di teoria come sistema ipotetico deduttivo e viene data molta attenzione alla ricerca dei concetti fondanti l'aspetto giustificatorio delle teorie. Si passa quindi da una considerazione dell'analisi prevalentemente fondata sui suoi risultati applicativi ad un interesse sempre maggiore per quanto riguarda le questioni algebriche; ed è proprio in ambito algebrico che la necessità di ripensamento teorico del concetto di teoria si declinerà in una chiave essenzialmente logica. Questo avvenne soprattutto in Inghilterra ad opera della scuola algebrica di Cambridge che vide in George Boole il suo esponente più rivoluzionario.

1. Vita e opere

George Boole nacque a Lincoln in Inghilterra nel 1815 da una famiglia di umili origini. Boole fu inizialmente autodidatta e si dedicò allo studio dei classici per poi avvicinarsi sempre di più alla matematica. I suoi lavori sulla risoluzione delle equazioni differenziali utilizzando metodi algebrici gli diedero grande notorietà. Boole era a conoscenza sia degli sviluppi in analisi portati dalla scuola continentale (la sua prima importante lettura in matematica fu il *Calcul Differéntiel* di Lacroix) sia di quanto stava accadendo in Inghilterra all'interno della cosidetta "Scuola di Cambridge". Questo movimento innovatore, capeggiato da Peacock e De Morgan, aveva introdotto la nozione di algebra simbolica (o astratta), che si contrapponeva a quella aritmetica. L'algebra aritmetica assumeva delle limitazioni alla fattibilità dei calcoli in quanto prendeva come dominio quello dell'aritmetica il quale limitava la possibilità di compiere operazioni, anche semplici (sottrarre una quantità maggiore da una minore, per esempio). Nell'algebra simbolica queste limitazioni scomparivano, in quanto il riferimento non era più unicamente numerico (quello diventava un caso particolare) ma si compiva una generalizzazione, facendolo diventare simbolico, regolato, cioè non più da interpretazioni specifiche ma da leggi. Boole sfruttò questa potenzialità applicando questo metodo alle equazioni differenziali. Egli mostrò come i simboli delle operazioni potessero essere distinti da quelli delle quantità attraverso l'introduzione degli operatori differenziali. In questo modo questi simboli potevano essere trattati come oggetti del calcolo, e la formula di un'equazione differenziale diventava un polinomio algebrico.[1] Per il suo articolo *On a general method of analysis*, pubblicato nei *Transactions of the Royal Society*, Boole ricevette la prestigiosa medaglia della società. La notorietà acquisita e i suoi successivi lavori, che pubblicò soprattutto in diversi articoli sul *Cambridge Mathematical Journal*, lo portarono ad assumere una cattedra al Queen's College di Cork in Irlanda. Boole diventò uno dei migliori matematici della scuola matematica di Cambridge, assieme a studiosi come Duncan Gregory, Augustus De Morgan, Arthur Cayley. Boole morì prematuramente a soli 49 anni nel 1864 a causa di una polmonite.

Le due opere maggiori di Boole sono *The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*, del 1847, e la successiva *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* del 1854. In questi due lavori trovano espressione le caratteristiche della ricerca logica booleana che, seguendo la suddivisione formulata da Corrado Mangione e Silvio Bozzi si possono riassumere in tre elementi:

1. l'importanza del linguaggio come strumento per la designazione delle classi e dei suoi elementi.
2. La dimensione psicologistica della logica, l'importanza, cioè, degli atti mentali che

[1] Si veda al riguardo Hailperin [1981]

vengono considerati come momenti giustificatori dei procedimenti logici.

3. Infine, la natura matematica di questi stessi processi, garantendo da una parte alla logica una autonomia disciplinare dalla filosofia la vincola, tuttavia, alla matematica che assume una priorità di "natura" rispetto al processo logico stesso.

4.

2. La "rivoluzione" booleana

Dato questo quadro generale, vediamo ora più in particolare in cosa consiste quella che unanimemente viene chiamata la rivoluzione booleana.

Il "pretesto" per la stesura de *The mathematical analysis of logic* venne dalla disputa tra De Morgan e William Hamilton, un matematico (amico di Boole) e un filosofo che si impegnarono in una lunga polemica sul sillogismo e in particolare sulla quantificazione del predicato.[2] Nella prefazione della suddetta opera Boole scrive che interessato da tale disputa fu indotto:

> "a riesumare trame, ormai dimenticate, di indagini precedenti. Mi sembrava che, malgrado la logica possa essere riguardata con riferimento all'idea di quantità, essa fosse caratterizzata anche da un altro e più profondo sistema di relazioni. Se era legittimo riguardarla dall'esterno come una scienza che attraverso la mediazione del Numero si connette con le intuizioni di spazio e tempo, era legittimo anche riguardarla dall'interno come basata su fatti di ordine diverso che hanno la loro sede nella costituzione della mente."[3]

Il contesto della discussione era quello di un ultimo tentativo di rielaborazione della sil-

[2] Riguardo alla controversia tra Hamilton e De Morgan e alla sua influenza sul pensiero di Boole si veda Laita [1979].
[3] Boole [1847], p. 1.

logistica aristotelica. Il modello aristotelico era ancora considerato come la struttura che stava alla base di ogni calcolo logico. Lo schema sillogistico era il paradigma su cui si basava l'analisi logica. I nuovi sviluppi nell'ambito matematico erano stati utilizzati per cercare di rendere la logica aristotelica più sicura. De Morgan, per esempio, era convinto che la sillogistica di Aristotele potesse essere migliorata grazie all'applicazione dei nuovi metodi algebrici di cui era stato uno dei principali scopritori. Boole, invece, scardina questa concezione fissista assegnando diverse possibili interpretazione a un calcolo logico, basandosi sulla natura essenzialmente formale di esso. Nelle parole di Boole:

> "Potremmo convenientemente assegnare alla matematica il carattere di un vero e proprio Calcolo, ossia di un metodo basato sui Simboli, le cui leggi di combinazione sono note e generali, e i cui risultati ammettono un'interpretazione coerente."[4]

Queste due citazioni chiariscono i tre punti richiamati in precedenza mettendo particolarmente in luce il singolare matematismo di Boole e la sua idea secondo cui proprio perché le leggi del pensiero riflettono la struttura della mente, poterle studiare algebricamente significherebbe riuscire a conoscere meglio la struttura della mente stessa.

Boole in questo senso rientra appieno in quella tradizione che spazia da Aristotele a Leibniz che ha da sempre cercato di comprendere e formalizzare i principi logici che regolano il pensiero. Tuttavia, il logico e matematico inglese si emancipa dal legame unico e vincolante con la logica di Aristotele. Anche per questo motivo lo si può a ben ragione considerare come colui che ha dato inizio alla logica simbolica moderna. Con *The mathe-*

[4] Boole [1847], p. 4.

matical analysis of logic di Boole assistiamo per la prima volta ad una vera e propria sistematizzazione della logica su base algebrica. Boole comprende come si possa estendere l'analogia tra la nuova algebra simbolica e la logica; tra, cioè, il simbolismo dell'algebra simbolica e quello utilizzato per esprimere le forme logiche o gli schemi sillogistici. Quest'idea produrrà un calcolo che unisce l'analisi delle classi e quella delle proposizioni. Boole costruisce, infatti, un calcolo che possiede formalmente la stessa struttura che può essere applicata, via un'opportuna interpretazione, a un ambito proposizionale o di classi. L'utilizzo della simbolizzazione permetteva poi, attraverso l'assegnazione di simboli astratti a strutture algebriche, un più raffinato passaggio interpretativo dalla matematica alla logica. Nella formulazione del suo sistema logico Boole identifica quello che oggi chiamiamo l'universo del discorso, che indica con il simbolo 1, intendendolo "come comprendente ogni classe concepibile di oggetti, sia che esistano realmente o no".[5] Definisce poi i simboli per le proprietà e per gli oggetti che godono di queste proprietà passando in seguito alla descrizione delle operazioni estensionali che Boole chiama "elettive". Attraverso l'operazione di elezione, che è un atto mentale, si ottengono le classi degli individui che godono di certe proprietà. Stabilito l'atto di elezione si possono definire le varie operazioni di prodotto e somma logica, il simbolo di uguaglianza estensionale e il suo complemento e le loro proprietà che Boole chiama "leggi del pensiero" e che si possono considerare come veri e propri assiomi (si tratta delle proprietà commutative e distributive rispetto alla somma e al prodotto, la sostitutività e la legge degli indici o di dualità). In questo modo si può ricostruire formalmente attraverso un approccio algebrico tutta la sillogistica (le "Leggi del sillogismo dedotte dal calcolo elettivo"). Lo scopo di Boole era, però, di andare oltre. Boole

[5] Boole [1847], p. 18.

definisce, infatti, sei di queste leggi del pensiero, ricavate (e applicabili) all'algebra numerica consueta. La sesta legge è quella che distingue il sistema booleano da quelli algebrici "standard”. Si tratta della cosidetta “legge degli indici”, che nella sua forma più comune viene scritta come x2=x, che può essere interpretata in ambiti diversi. La legge vale, per esempio, nell’aritmetica binaria dove i due soli numeri sono 0 e 1. Se interpretiamo l’1 come l’universo del discorso e lo 0 come “il niente”, la classe vuota, la legge permette di ricavare, per esempio, il principio di non contraddizione. Il concetto fondamentale è proprio l'interpretabilità di un sistema in termini numerici come, per esempio, in termini di classi. In questo senso c'è in Boole il riconoscimento della dicotomia tra sintassi e semantica: l'argomentare logico procede per mezzo di regole sintattiche mentre l'aspetto semantico interviene quando c'è bisogno di dare un'interpretazione ai dati risultanti dal processo deduttivo. L'utilizzo di un metodo che procede attraverso l'uso di simboli fa sì che Boole sia stato il primo a comprendere il valore dell'indipendenza del procedimento simbolico-formale: è l'interpretazione che fornisce una giustificazione di coerenza per il calcolo. Perciò, se una deduzione simbolica è valida in una certa interpretazione lo sarà anche in qualsiasi altra a patto che le regole del calcolo che si sono utilizzate vengano soddisfatte anche nella nuova interpretazione. In questo senso si riesce a scardinare la visione classica ancora vincolata strettamente al sillogismo aristotelico che rimane come un caso particolare inglobato in un metodo deduttivo molto più generale che ha nella sua parte algebrica il vero e proprio calcolo. Il calcolo di Boole ha poi un'interpretazione possibile come calcolo delle proposizioni e in questo ha un fondamentale valore logico in quanto viene mostrato come la struttura formale del calcolo delle classi e di quello proposizionale sia la stessa, previa un'opportuna interpretazione. In più Boole mostra nelle *Laws* come questa struttura algebrica di base possa essere applicata a un calcolo probabilistico che quindi può godere di un fondamento essenzialmente logico.

Il calcolo booleano è caratterizzato dall'applicazione dei metodi algebrici e, in particolare, dall'importanza che ha il procedimento di espansione o sviluppo di una funzione. Qualsiasi espressione del calcolo algebrico nel quale è presente il simbolo elettivo (variabile) x si può esprimere come funzione di x e si può rappresentare con f(x). Questa è la forma più semplice e generale; lo stesso procedimento si può applicare per funzioni a più argomenti. Attraverso lo sviluppo polinomiale delle funzioni i cui simboli soddisfano la legge degli indici si può arrivare alla formula standard

$$f(x) = ax + b(1-x)$$

che è la formula base per lo sviluppo della funzioni elettive. Sostituendo a x 1 o 0 si può ricavare un metodo generale per funzioni con un qualsiasi numero finito di variabili. Il complesso del calcolo booleano permette di operare anche con funzioni molto più generali rispetto all'assegnazione dei valori interpretabili con 0 e 1. In questo caso (nel caso cioè che i coefficienti della funzione non siano interpretabili) è necessario un processo diverso da quello dello sviluppo, il processo di soluzione di un'equazione. Già in *The mathematical analysis of logic* Boole dedica un capitolo alla soluzione delle equazioni elettive, un processo che determini il valore di una variabile di una proposizione elettiva in funzione delle altre variabili che fanno parte della funzione:

> “in qualunque modo un simbolo elettivo, considerato come incognita, sia

> contenuto in un'equazione data, è posibile determinare il suo valore completo nei termini dei termini elettivi rimanenti, considerati come noti."[6]

Boole utilizza anche in questo caso una totale analogia con l'algebra: nel caso di equazioni complesse a più variabili in cui trovare una soluzione significa interpretare i risultati dello sviluppo dell'espressione, l'unico problema è quello di dare un'interpretazione ai coefficienti numerici. In particolare si pone il problema di interpretare i coefficienti come 1/0 e 0/0. Su questo punto Boole non è molto chiaro: sia in *The mathematical analysis of logic* sia nelle *Laws* per l'interpretazione dei coefficienti 1, 0, 1/0 e 0/0, egli cerca una analogia con l'aritmetica ma non riesce a dargli un'interpretazione puramente logica (Boole tenterà di dargli anche un'interpretazione in termini di categorie). Ecco quindi che 0/0 indica "tutti, qualche, nessuno" in quanto:

> "Come in aritmetica, il simbolo 0/0 rappresenta un *numero indefinito*, ecceto quando è detrminato altrimenti in base a qualche circostanza speciale, l'analogia richiede che nel sistema esposto in quest'opera il medesimo simbolo indichi una *classe indefinita*."[7]

Boole definisce poi i processi di eliminazione e riduzione che sono sempre dei calchi delle corrispettive operazioni algebriche. Proprio questi due processi consentono di inglobare nel calcolo delle equazioni elettive tutta la teoria del sillogismo. L'analisi di Boole delle forme sillogistiche e, più in generale, dell'approccio logico di Aristotele tradotto all'interno del suo sistema porta Boole a prendere una posizione molto critica rispetto alla logica aristotelica. Mettendo infatti a confronto la potenza e la generalità dell'algebra della

[6] Boole [1847], p. 76.
[7] Boole [1854], p. 89.

logica con la sillogistica, risaltavano le debolezze e le limitiazioni espressive di quest'ultima. Il capitolo XV delle *Laws* (il capitolo che chiude la trattazione puramente logica) si occupa proprio della logica tradizionale aristotelica mostrando come il sistema di Aristotele:

> "non è una scienza, ma un insieme di verità scientifiche, troppo incompleto per farne sistemi, e non sufficientemente fondamentale per servire come fondamento su cui basare un sistema perfetto."[8]

Di questa sistematicità, ovviamente, la logica algebrica di Boole non difetta. Mentre infatti, la logica aristotelica si dimostrava essere solo una limitata "lista" di verità logiche, il sistema creato da Boole permetteva, grazie alla sua generalità, di creare formule algebriche che potevano essere applicate a un numero infinito di contesti. In questa potenza risiede principalmente la forza innovatrice del lavoro di Boole.

3. Ricezione, successo e critiche

L'impatto che Boole ebbe sulla logica ottocentesca fu molto grande. In particolare i lavori di Boole e la sua nuova prospettiva algebrica hanno dato il via in campo logico alla rivoluzione ottoentesca che ha segnato la nascita della logica contemporanea. Peirce e Schroeder partendo dai risultati di Boole riuscirono a sviluppare un calcolo delle relazioni molto più ampio e generale di quello del matematico inglese. L'impronta algebrica data da Boole alla logica ebbe per tutto il secolo fino alla fine della stagione dei fondamenti negli anni trenta del novecento una influenza diretta o indiretta molto forte. Pochissimi sono gli autori che si

[8] Boole [1854], p. 241.

scostano dal contesto e dai metodi che il matematico inglese sviluppò. Se escludiamo Frege e Grassmann solo uno scarno gruppo di autori, che possiamo considerare secondari per la storia della logica, non condivisero la rivoluzione booleana. D'altra parte gli studiosi che iniziarono o continuarono a operare seguendo la traccia lasciata da Boole non si limitarono affatto a una pedissequa ripetizione o rielaborazione della teoria booleana. Essi lavorarono in direzione della risoluzione delle difficoltà che affliggevano il sistema del logico anglosassone verso l'estensione dell'algebra di Boole a una più generale algebra delle relazioni. Boole influenzò tutti i maggiori autori che scrissero di logica nell'ottocento: Jevons, Peirce, Schroeder, Macfarlane, De Morgan, Harley, Peano e molti altri furono in debito con il matematico e il suo nuovo approccio algebrico.

I punti principali verso cui si rivolsero le critiche e i tentativi di miglioramento dell'algebra Booleana furono essenzialmente indirizzati alle lacune tecniche come la concezione della somma quale operazione esclusiva e la mancanza di una chiara definizione della relazione d'identità, e a questioni più generali come il suo psicologismo e il suo matematismo considerati a volte troppo estremi. A questo si deve aggiungere l'estensione da parte soprattutto di Peirce e Schroeder dell'idea algebrica di Boole a una più generale logica delle relazioni che avrà successivamente un forte impatto sulla concezione logicista di Frege e Russell. Riguardo al suo matematismo e psicologismo Boole stesso scrive nelle *Laws* che

> "A parte le proposizioni generali che sono derivate per induzione dai fatti dell'esperienza confrontati tra loro, ne esistono altre appartenenti al dominio di quele che sono chiamate verità necessarie. Tali sono le proposizioni generali dell'aritmentica, come pure quelle proposizioni esprimenti le leggi

> del pensiero su cui si fondano i metodi di questo tratato; e queste proposizioni non sono solo suscettibili di essere verificate rigorosamente in casi particolari, ma sono rese manifeste in tutta la loro generalità dallo studio di casi particolari."[9]

Boole lavorò ad un'opera, che non riuscì a concludere, che voleva cercare una sintesi tra la logica tradizionale, l'algebra della logica e la matematica, vale a dire:

> "una matematica nel senso più ampio, e io penso, più vero, intesa come ragionamento universale espresso in forme simboliche e guidato da leggi che hanno la loro sede ultima nella mente umana."[10]

L'incompiutezza di questo progetto e la mancanza di documenti che attestino chiaramente l'obiettivo a cui puntava Boole, non permettono di esprimere un'opinione concorde sul pensiero booleano. Tuttavia, resta il fatto che la rivoluzione compiuta da Boole può essere considerata uno dei momenti più importanti, se non il momento più importante, della nascita della nuova logica moderna; un'elaborazione teorica i cui metodi e risultati risulteranno fondamentali per tutto lo sviluppo di una disciplina che dal 1800 in poi parte alla ricerca di un suo nuovo status autonomo.

Le algebre di tipo booleano acquisiranno un'importanza sempre maggiore e troveranno vasti campi di applicazione sia nelle scienze matematiche più pure sia nelle nuove discipline come l'elettronica prima e l'informatica successivamente nelle quali l'approccio di tipo algebrico booleano si è rivelato fondamentale. Per quanto riguarda la matematica sono da ricordare i contributi che Boole diede nel campo dell'analisi dove applicò i suoi metodi al-

[9] Boole [1854], p. 552.
[10] Dalla prolusione di Boole come Dean of Science al Queen's College di Cork, 1851-1852.

gebrici per la risoluzione delle equazioni differenziali. I suoi lavori più influenti in questo capo sono il *Treatise on Differential Equations* e *Treatise on the Calculus of Finite Differences*. Altro campo in cui eccelse fu quello degli studi probabilistici nei quali Boole cercò di sviluppare dei metodi generali di approccio alla teoria della probabilità. L'applicazione delle algebre Booleane in campo elettrico ed elettronico ha inizio negli anni venti del secolo scorso quando furono utilizzate prima come modello per la progettazione di circuiti elettrici telefonici e successivamente come fondamento nella progettazione dei circuiti digitali.

BIBLIOGRAFIA

OPERE DI BOOLE

Boole G. (1847), *The mathematical analysis of Logic*, MacMillian, Barclay & MacMillian, Cambridge, Tr. it. di M. Mugnai (1993), *L'analisi matematica della logica*, Bollati Boringhieri, Torino.

Boole G. (1854), *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, Walton & Maberly, London, Tr. it. di. M. Trinchero (1976) *Indagine sulle teorie del pensiero su cui sono ondate le leggi matematiche della logica e della probabilità*, Einaudi, Torino.

Boole G. (1859), *A treatise on differential equations*, MacMillian, Cambridge.

LETTERATURA SECONDARIA

Agazzi E., Vassallo N. (a cura di) (1998), *George Boole: filosofia, logica e matematica, Franco Angeli*, Milano.

Burris R. “Gorge Boole”, *Stanford Enciclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/boole/

Gasser J. (a cura di) (2000), *A Boole anthology: recent and classical studies in the logic of George Boole*, Kluwer, Dordrecht.

Hilperin T. (1981), “Boole's Algebra Isn't Boolean Algebra”, *Mathematical Magazine*, 54, 4, pp. 172-184.

Harley R. (1866), *George Boole: an essay biographical and expository*, Worford, London.

Laita L. M. (1979), “Influences on Boole's Logic: The Controversy between William Hamilton and Augustus De Morgan”, *Annals of sciences*, 36, pp. 45-65.

Mac Hale D. (1985), *George Boole: his life and work*, Boole Press, Dublin.

Mangione C., Bozzi S. (1993), *Storia della logica, da Boole ai nostri giorni*, Garzanti, Milano.

Sikorski R. (1960), *Boolean Algebras*, Springer, Berlin.

Smith G. C. (a cura di) (1982), *The Boole-De Morgan correspondence: (1842-1864)*, Clarendon Press, Oxford.