APhEx 14, 2016 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 09/03/2016
Accettato il: 05/06/2016
Redattore: Vera Tripodi

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N° 14 GIUGNO 2016

T E M I

Matematica costruttiva

Laura Crosilla[*]

*La matematica costruttiva pone a proprio fondamento l'utilizzo della logica intuizionista***,** *piuttosto che quello della logica classica. Questo presupposto permette di proporla come matematica algoritmica, in quanto il suo ottemperare ad una nozione di dimostrazione intuizionista consente di interpretarne i teoremi come veri e propri algoritmi. Proprio questa caratteristica della matematica costruttiva ha in sé la potenzialità per*

[*] Ringrazio Gianna Bonati per l'attenta revisione del testo, che ha consentito di eliminare numerosi anglicismi. Ringrazio inoltre i revisori per i commenti e gli ulteriori suggerimenti bibliografici. Ringrazio infine la redazione APhEx e in particolare Vera Tripodi per l'infinita pazienza e gentilezza.

modificare profondamente la percezione che la comunità matematica avverte nei confronti di questa pratica: da pratica deviante e non-standard, essa potrebbe divenire in un prossimo futuro una componente centrale della matematica stessa. Il presente articolo si propone non solo di esporre i principali caratteri della matematica costruttiva, ma anche di evidenziarne le differenze più rilevanti che emergono da un confronto sia con la matematica classica sia con altri tipi di matematica fondati sulla logica intuizionista. Ulteriore obiettivo è quello di illustrare alcune tra le motivazioni addotte dai suoi sostenitori per giustificare la svolta costruttiva.

1. INTRODUZIONE
2. LE ORIGINI DELLA MATEMATICA COSTRUTTIVA E IL RUOLO DELLA LOGICA INTUIZIONISTA
   2.1. LOGICA INTUIZIONISTA
   2.2. L'INTERPRETAZIONE BHK
3. STRATEGIE COSTRUTTIVE
   3.1 DIMOSTRAZIONI
   3.2 DEFINIZIONI
4. VARIETÀ DI MATEMATICHE COSTRUTTIVE E COMPATIBILITÀ
   4.1 MATEMATICA COSTRUTTIVA COME NUCLEO CENTRALE DELLE VARIETÀ MATEMATICHE
5. MOTIVAZIONI PER LO SVILUPPO COSTRUTTIVO DELLA MATEMATICA
   5.1 MOTIVAZIONI INTERNE: RICHMAN, LA GENERALIZZAZIONE E LA FINEZZA
   5.2 MOTIVAZIONI PRAGMATICHE: CALCOLABILITÀ

1. Introduzione

La matematica è stata nel corso degli anni, ed è tuttora, campo di profondi e continui cambiamenti. Un aspetto importante si è rivelato in anni recenti: si è assistito ad una proliferazione di dimostrazioni estremamente complesse e lunghe, spesso frutto del lavoro, protrattosi per anni, di gruppi di ricercatori altamente specializzati, piuttosto che opera di singoli individui. La complessità così accentuata di tali dimostrazioni ha suscitato rinnovato interesse per un settore di ricerca all'intersezione tra informatica teorica e logica: l'*assisted theorem proving*. L'idea fondamentale è quella di verificare risultati matematici attraverso l'utilizzo di apposito *software*. Si riscrivono in modo rigorosissimo, ponendo la massima attenzione a non trascurare alcun dettaglio, anche minimo, ovvero si *formalizzano*, teoremi matematici mediante interazione con appositi *proof assistants.* Una corretta formalizzazione consente poi la verifica automatica delle dimostrazioni[1]. La speranza nutrita da molti è che queste nuove "tecnologie" possano, nel tempo, rendere meno complesso e più sicuro il lavoro del matematico facilitando, attraverso la creazione di vere e proprie banche dati di risultati meccanicamente attestati, sia la verifica sia la condivisione di dimostrazioni. Un'ulteriore aspirazione è che si possano con il tempo individuare strategie dimostrative che, una volta meccanizzate, possano non solo rendere più agevole la verifica di dimostrazioni note, ma anche assistere nella scoperta di nuovi teoremi. Anche se attualmente siamo ben lontani dalla realizzazione di questa utopia, l'attività di trascrizione di capitoli di matematica contemporanea in *proof assistants* procede con passo sostenuto e costante perfezionamento.

In questo quadro si inserisce il rinnovato interesse per forme meno tradizionali di matematica, e, in particolare, per quella costruttiva, che utilizza la logica intuizionista come sua base[2]. La matematica costruttiva, infatti, si qualifica, grazie alla sua peculiare natura algoritmica, come particolarmente adatta a divenire utile strumento per la realizzazione degli obiettivi sopra esposti. Ed è proprio il ricorso alla logica intuizionista che consente di interpretare i teoremi costruttivi come *algoritmi*[3]. Sulla base di questa considera-

[1] Il *software* implementa (ovvero codifica) una teoria logica, come, per esempio, una qualche teoria dei tipi o una versione di *higher order logic*. Lo scopo è ottenere una formalizzazione meticolosa di enunciati matematici e delle rispettive dimostrazioni. Il punto di partenza è spesso una dimostrazione nota di un enunciato matematico, espressa nel linguaggio matematico usuale, ovvero una dimostrazione informale. Nei *proof assistants* attualmente più comuni si procede interattivamente: l'utente guida il processo di formalizzazione ed è assistito dal *software*, che può fornire, ad esempio, suggerimenti su come procedere, oppure può compiere in modo meccanico alcuni passaggi semplici, o, ancora, può consentire di attingere a ricche raccolte di lemmi e teoremi già dimostrati. I più comuni *proof assistants* utilizzano inoltre dei meccanismi di ricerca automatica di dimostrazioni e le cosiddette "tattiche" di dimostrazione. Al compimento della formalizzazione si perviene dunque a una dimostrazione che è stata controllata (verificata) dal *software*, e quindi si ha un'attestazione della correttezza della dimostrazione informale originaria. Si noti inoltre che la formalizzazione è in genere un processo complesso e tedioso, poiché il percorso deduttivo attuato con il supporto della macchina non consente di eliminare passaggi intuitivi e banali che vengono spesso omessi nelle dimostrazioni usuali. Inoltre durante il processo di formalizzazione possono rivelarsi piccoli errori nelle dimostrazioni informali di partenza, oppure passaggi omessi perché ritenuti banali, la cui correzione o integrazione richiede, da parte dell'operatore, una complessa elaborazione.

[2] Come ulteriormente chiarito di seguito (Sezione 2), l'attenzione dei ricercatori si è volta a forme di matematica che utilizzano la logica intuizionista ma che si differenziano per numerosi rispetti dalla matematica originariamente proposta da Brouwer.

[3] Si veda la Sezione 2.2.

zione ha preso impulso, negli ultimi anni, lo sviluppo di una ricerca innovativa, molto ambiziosa nei propri obiettivi, che si avvale di *proof assistants* costruttivi, come, per esempio, Coq[4]. La fase iniziale è analoga a quella appena descritta per *proof assistants* in generale: si utilizza apposito software per ottenere in modo semi-automatico (o interattivo) dimostrazioni formali (ora costruttive) di teoremi matematici che vengono in seguito controllati dal medesimo *software*. La novità consiste nel fatto che il *proof assistant* codifica ora una teoria matematica basata sulla logica intuizionista (in genere una teoria costruttiva dei tipi). Ciò consente di trasformare in modo del tutto *automatico* la dimostrazione costruttiva di un enunciato matematico in vero e proprio programma, pronto per l'applicazione a casi concreti. Si parla in questo caso anche di *estrazione di programma dalla dimostrazione matematica*. L'obiettivo è dunque quello di ottenere nuove forme di programmazione che siano semi-automatiche, rapide ed esenti da errore, con conseguente riduzione dei costi, attualmente pesanti, di programmazione e verifica del *software*.

Questi sviluppi fanno presagire, in tempi brevi, l'acquisizione, da parte dell'attività costruttiva, di un ruolo di maggiore centralità rispetto alla posizione attualmente occupata all'interno della matematica nel suo complesso. In questo breve articolo, mi esimo dal voler valutare le conseguenze filosofiche della trasformazione in corso. Il lavoro presente ha scopo ben più limitato: si prefigge di fornire un'elementare panoramica della matematica costruttiva e delle motivazioni addotte da suoi esponenti di rilievo per una svolta verso di essa.

Nel seguito ricorderò inizialmente alcuni aspetti fondamentali della logica intuizionista, tra essi la nota interpretazione BHK di connettivi e quantificatori. Nella sezione 3 accennerò ad alcune conseguenze dell'adozione della logica intuizionista e tipiche strategie adottate dai costruttivisti per sviluppare la loro matematica alternativa.

Nella sezione 4 introdurrò un'importante distinzione tra varietà di matematica che fanno uso della logica intuizionista. La tesi principale di quella sezione è che la matematica costruttiva alla Bishop si colloca all'intersezione di importanti tradizioni diverse in matematica e per questo è ritenuta dai suoi promulgatori come strumento cruciale per l'analisi di ciascuna di tali varietà.

Infine, nella quinta sezione riporterò il punto di vista di alcuni costruttivisti contemporanei, ed esporrò le motivazioni che li hanno spinti ad abbandonare la logica classica ed a sviluppare una forma di matematica alternati-

[4] Si veda http://coq.inria.fr.

va a quella standard. Tali motivazioni possono offrire spunto per avviare una riflessione filosofica sulla matematica costruttiva.

2. Le origini della matematica costruttiva e il ruolo della logica intuizionista

Nel 1967 Errett Bishop (1928-1983) pubblicò *Foundations of Constructive Analysis*, inaugurando così un approccio del tutto nuovo alla matematica. Il libro sviluppava *costruttivamente* parti sostanziali dell'analisi del XX secolo[5]. Componente fondamentale della trattazione costruttiva iniziata da Bishop è l'utilizzo della logica intuizionista. In questo senso il lavoro di Bishop si inserisce all'interno di una tradizione che ha origine in L. E. J. Brouwer (1881-1966) seppure, come verrà chiarito più avanti, presenti anche notevoli differenze con l'impostazione di quest'ultimo. L'opera di Bishop ha dato avvio ad un ricco filone di matematica costruttiva che, come indicato nella sezione precedente, ha fatto registrare forte espansione negli anni più recenti anche sotto l'impulso delle prospettate applicazioni informatiche[6].

Va riconosciuto a Bishop il merito di essere giunto alla piena consapevolezza che l'utilizzo della logica intuizionista avrebbe consentito di ottenere una forma di matematica algoritmica adatta a essere utilizzata col supporto dei computers. Si deve invece a Brouwer la realizzazione fondamentale che l'omissione del principio del terzo escluso (TND, *Tertium Non Datur*)[7] non avrebbe precluso lo sviluppo di una forma di matematica ricca. A partire dalla sua tesi (1907) Brouwer iniziò a sviluppare una varietà di matematica che differiva in modo sostanziale da quella usuale, o classica. Semplificandone notevolmente il pensiero, si può affermare che la principale motivazione per la svolta intuizionista da parte di Brouwer fu una concezione della matematica come creazione libera della mente umana.[8] Secondo

[5] Per esempio: i teoremi di Stone-Weierstrass, Hahn-Banach, i teoremi di convergenza di Lebesgue per integrali astratti, la teoria della misura di Haar, le trasformazioni astratte di Fourier ed elementi della teoria delle algebre di Banach.

[6] Si vedano, per esempio: Bishop, Cheng (1972); Martin-Löf (1975, 1982, 1984); Beeson (1985); Bishop, Bridges (1985); Bridges, Richman (1987); Mines, Richman e Ruitenburg (1988); Troelstra, van Dalen (1988); Nordström, Petersson, Smith (1990); Claude, Ishihara (2005); Crosilla, Schuster (2005); Bridges, Vîţă (2006); Univalent Foundations Program (2013); Bridges, Palmgren (2014); Lombardi, Quitté (2015).

[7] Il principio del terzo escluso stabilisce che per ogni proposizione A, si ha $A \vee \neg A$ (A oppure non A).

[8] Per un'analisi del pensiero di Brouwer si veda Franchella (2016).

Brouwer la matematica è un'attività non-linguistica, basata sull'intuizione pura (in senso Kantiano) del tempo. Il ruolo predominante assegnato da Brouwer all'intuizione pura, e, di conseguenza, al soggetto dell'attività matematica, ha un impatto profondo sul conseguente concetto di verità di un enunciato matematico. Per Brouwer, infatti, un enunciato è vero solo qualora il matematico abbia effettuato un'appropriata costruzione mentale (una dimostrazione), mentre è falso qualora egli abbia effettuato una costruzione mentale che produce una contraddizione. La nozione di dimostrazione guadagna quindi posizione centrale nella concezione di verità intuizionista. La principale conseguenza di una posizione filosofica di questo tipo è l'abbandono del TND (Brouwer 1908). Infatti, essendo numerosi gli enunciati matematici per i quali non possediamo né dimostrazione né refutazione e per i quali non riusciamo a immaginare una procedura che porti alla loro dimostrazione o refutazione, l'applicazione indiscriminata del principio del terzo escluso parve a Brouwer ingiustificata[9].

La logica intuizionista fu successivamente codificata e presentata sotto forma di sistema formale alla Hilbert in parte da Kolmogorov (1925) e successivamente, in modo più completo, da Heyting (1930), con lo scopo di chiarire le differenze tra ragionamento classico e intuizionista. Ulteriore fondamentale avanzamento nella comprensione della relazione tra logica intuizionista e classica fu l'introduzione dei calcoli dei sequenti e della deduzione naturale concepiti da Gentzen (1935). Un aspetto essenziale che si evince a seguito di tali formalizzazioni della logica intuizionista è il suo risultare sottosistema della logica classica, ottenuto attraverso appropriate modifiche dei calcoli classici che hanno l'effetto di eliminare da essa il principio del terzo escluso (o della legge della doppia negazione: $\neg\neg A \rightarrow A$)[10].

Altra proprietà cruciale del calcolo dei predicati intuizionista è la cosiddetta traduzione della doppia negazione di Gödel e Gentzen, che consente di

---

[9] Attualmente, per esempio, non possediamo né dimostrazione né refutazione della congettura di Goldbach. Il costruttivista è inoltre convinto che qualora tale congettura venga dimostrata o refutata, vi saranno comunque altri enunciati che eluderanno dimostrazione o refutazione, etc. Spesso il TND è visto dai matematici costruttivi come un principio di "onniscienza", ovvero l'assunzione (ritenuta ingiustificata) che qualsiasi problema ben formulato potrà sempre essere o dimostrato ovvero refutato. Per esempio, Bishop chiamò *principio di onniscienza limitato (LPO)* una particolare conseguenza del TND che riveste ruolo importante in analisi costruttiva. Esso, infatti, consente di ottenere numerosi risultati classici che non sono costruttivamente dimostrabili e sembra quindi catturare "l'essenza classica" di un'ampia porzione di analisi (si veda per esempio Bridges, Richman (1987)).

[10] Per un'introduzione alla logica intuizionista si veda, per esempio, Troelstra, van Dalen (1988).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

ribaltare la prospettiva atta a valutare la relazione tra logica intuizionista e classica. Si può infatti definire ricorsivamente un'interpretazione della logica proposizionale classica in quella intuizionista tale che data una formula ϕ, essa è dimostrabile classicamente se e solo se ϕ è dimostrabile intuizionisticamente. Data l'equivalenza in logica classica tra $\neg\neg\phi$, la traduzione della doppia negazione consente di vedere la logica proposizionale classica come particolare caso della logica proposizionale intuizionista. Tale interpretazione può essere estesa in modo naturale alla logica dei predicati e consente dunque di vedere la logica intuizionista come generalizzazione di quella classica[11].

2.1 Logica intuizionista

Anche a rischio di riproporre fatti ben noti, è opportuno ricordare alcune caratteristiche fondamentali della logica intuizionista.

In primo luogo la messa al bando, nella logica intuizionista, del principio del terzo escluso non significa che esso sia falso. Più precisamente, pur essendo il TND privo di giustificazione, e per questo motivo omesso, non si può da ciò far derivare, sulla base della sola logica, la sua negazione per le seguenti ragioni:

1) si può dimostrare intuizionisticamente la sua doppia negazione (ovvero, $\neg\neg(A \vee \neg A)$),
2) vale, intuizionisticamente, il principio di non contraddizione, per cui $\neg(A \wedge \neg A)$.

In secondo luogo, l'omissione del TND comporta conseguenze notevoli per la risultante nozione di dimostrazione. Il principio del terzo escluso, infatti, ha un potente effetto *unificante* in matematica: consente di dimostrare l'equivalenza di numerosi enunciati apparentemente distinti. La sua assenza, quindi, richiede la capacità di discernere nozioni che spesso, abituati aoperare nell'ambito della logica classica, consideriamo equivalenti.

L'impatto dell'assenza del TND si evidenzia in modo emblematico a livello di concetti matematici[12], ma è palese già a livello di pura logica. Per

[11] Questo risultato può essere esteso anche a teorie matematiche, come, per esempio, l'aritmetica di Peano, che è interpretabile nella sua corrispondente intuizionista (l'aritmetica di Heyting); oppure alla teoria degli insiemi, ZF, che è interpretabile in una sua variante intuizionista, nota con il nome di IZF (si veda Beeson (1985)).
[12] Si veda la Sezione 3.

esempio nella logica intuizionista non si è in grado di derivare le leggi di De Morgan che consentono di riportare la disgiunzione a negazione e congiunzione (o, simmetricamente, la congiunzione a negazione e disgiunzione). In modo analogo non vi è modo di dimostrare l'equivalenza di enunciati della forma $\neg\forall x \neg (\phi(x))$ ed $\exists x (\phi(x))$[13]. Ne consegue che tutti i connettivi e quantificatori (esclusa la negazione) sono primitivi nella logica intuizionista e sono talvolta percepiti come "più forti" dei corrispettivi classici, ovvero inducono una nozione di dimostrazione più stringente di quella classica. Per esempio, come ulteriormente chiarito nella sezione 2.2, per dimostrare costruttivamente un enunciato esistenziale, $\exists x (\phi(x))$, non è sufficiente dimostrare che l'assunzione di $\forall x \neg (\phi(x))$ porti a contraddizione, ma è altresì necessario fornire un *witness*, un testimone: un particolare individuo, α, che soddisfi l'enunciato $\phi(\alpha)$.

2.2 L'interpretazione BHK

Questo modo di intendere connettivi e quantificatori è esemplificato in modo significativo nella spiegazione costruttiva standard di connettivi e quantificatori, spesso chiamata *interpretazione BHK* (Brouwer, Heyting e Kolmogorov). L'interpretazione BHK fornisce non solo una semantica informale di connettivi e quantificatori, espressa in riferimento ad un concetto primitivo di *prova o dimostrazione informale*[14], ma anche una spiegazione, ancora informale, del concetto di dimostrazione costruttiva. Nel seguito esporrò i principali aspetti della BHK, allo scopo di fornire un'intuizione del perché le dimostrazioni costruttive possono essere lette come algoritmi.

Dato un enunciato matematico, l'interpretazione BHK chiarisce come ottenere una sua dimostrazione costruttiva a partire da dimostrazioni dei suoi sotto-enunciati. I connettivi e quantificatori possono infatti essere visti come operatori che agiscono su dimostrazioni di sotto-enunciati (e ulteriori oggetti, per esempio *witnesses*) per produrre dimostrazioni di enunciati più complessi. Per esempio, una dimostrazione costruttiva di un enunciato esistenziale, $(\exists x \in A)\ \phi(x)$, è ottenuta abbinando un elemento, α, di A, il

[13] In generale solo alcune direzioni di tali bicondizionali classici si possono dimostrare intuizionisticamente.

[14] Tale spiegazione informale è resa più precisa in contesti formali attraverso, per esempio, il concetto di realizzabilità introdotto da Kleene (1958), oppure la corrispondenza di Curry-Howard che relaziona sistemi costruttivi con calcoli computazionali. Quest'ultima è in particolare il fulcro della teoria dei tipi di Martin-Löf (1975, 1984).

witness, e una dimostrazione che $\phi(\alpha)$ vale. Come già osservato, contrariamente a quanto sancito dalla logica classica, nella logica intuizionista una dimostrazione di $\neg(\forall x \in A)\neg(\phi(x))$ è ritenuta insufficiente come prova dell'enunciato esistenziale $(\exists x \in A)\,\phi(x)$. Ciò in quanto essa stabilisce semplicemente un fatto *negativo*, l'incoerenza di una dimostrazione di $(\forall x \in A)\,\neg(\phi(x))$, e non fornisce alcuna *informazione positiva* che ci aiuti a trovare concretamente un *witness* dell'esistenziale. Come ulteriore esempio posso ricordare che la dimostrazione costruttiva di una disgiunzione presuppone la dimostrazione di uno dei disgiunti; è insufficiente dimostrare che la congiunzione delle negazioni dei disgiunti porti a contraddizione. Qui nuovamente si osservi la ricchezza di informazione offerta da una dimostrazione costruttiva, che richiede che venga fissato uno dei due disgiunti come "garante" della validità della disgiunzione stessa.

Un'implicazione, $A \rightarrow B$, è verificata qualora si possieda un *metodo* che consenta di trasformare una dimostrazione di A in una dimostrazione di B[15]. Si noti qui la profonda differenza con l'implicazione materiale classica, secondo cui per ottenere una dimostrazione di $A \rightarrow B$ è sufficiente avere una dimostrazione di $\neg A$ oppure una di B. La dimostrazione costruttiva invece richiede di fornire un metodo, ovvero una procedura, o un *algoritmo*, che, passo passo, consenta di dimostrare B a partire da una dimostrazione di A.

La dimostrazione costruttiva di un enunciato universale, $(\forall x \in A)\,\phi(x)$, è un algoritmo che trasforma la prova che α appartiene ad A in una dimostrazione del fatto che $\phi(\alpha)$ vale. Infine, la negazione, $\neg A$, di un enunciato A è così definita: essa è $A \rightarrow \perp$, dove $\perp$ è una costante che rappresenta l'assurdo (e quindi non ha dimostrazione). Una dimostrazione di $\neg A$ dunque richiede un metodo che consenta di passare da una ipotetica dimostrazione di A ad una dimostrazione dell'assurdo[16].

Penso che questi brevi accenni all'interpretazione BHK siano già sufficienti per chiarire che la nozione di dimostrazione costruttiva è più stringente di quella classica, e, simultaneamente, che le dimostrazioni intuizioniste

[15] Come il concetto di prova, anche il concetto di metodo è qui primitivo. Questo fatto può indurre a dubitare dell'efficacia dell'interpretazione BHK come *spiegazione* del concetto di dimostrazione costruttiva. Si osservi che teorie costruttive dei tipi come, ad esempio, la teoria costruttiva dei tipi di Martin-Löf (1975, 1984) specificano formalmente, attraverso un opportuno sistema di regole, entrambi i concetti di prova e di metodo.

[16] Si vedano per esempio Troelstra-van Dalen (1988) oppure van Atten (2009) per esposizioni dell'interpretazione BHK della logica intuizionista.

sono più *informative* rispetto a quelle classiche. Proprio il fatto che le dimostrazioni intuizioniste forniscono informazione aggiuntiva rispetto alle classiche, le rende *algoritmiche*. A conferma di ciò vediamo rapidamente un esempio tipico: sia dato un enunciato della forma $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ \phi(x,y)$. Una dimostrazione costruttiva di tale enunciato può essere vista come un metodo o *algoritmo* che risolve un *problema* posto dall'enunciato stesso: dato un oggetto, α, di tipo A, trovare un oggetto, β, di tipo B che soddisfa $\phi(\alpha,\beta)$[17]. In termini informatici, una dimostrazione di un tale enunciato è un algoritmo che può essere utilizzato per produrre un programma che soddisfi la sua *specificazione* (l'enunciato, o il problema). Più precisamente, supponiamo di essere pervenuti alla dimostrazione dell'enunciato di cui sopra all'interno di un sistema formale quale, ad esempio, la teoria costruttiva dei tipi, che implementa versioni dettagliate e formali dell'interpretazione BHK[18]. Qui una dimostrazione, δ, di $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ \phi(x,y)$ è un *algoritmo* che, dato un oggetto α in A, produce: (1) un oggetto β, in B, tale che $\phi(\alpha,\beta)$; (2) una prova, γ, del fatto che $\phi(\alpha,\beta)$ vale. La prova γ può essere pensata come un'espressione (nel linguaggio della teoria dei tipi) che codifica la dimostrazione di $\phi(\alpha,\beta)$; essa funge altresì da certificazione del fatto che l'algoritmo δ è ben costruito (ovvero soddisfa la specificazione del problema data dall'enunciato $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ \phi(x,y)$). Proprio quest'ultimo punto sta alla base della ricerca che va sotto il nome di estrazione automatica di programmi da dimostrazioni costruttive a cui si è accennato nella Sezione 1: la dimostrazione costruttiva, l'algoritmo δ, una volta implementata in un appropriato *proof assistant* costruttivo verrà trasformata meccanicamente in un programma. Inoltre avremo la garanzia, assicurata da γ, che il programma è *corretto*, ovvero soddisfa la propria specificazione, ovviando agli usuali costi di verifica post programmazione.

3. Strategie costruttive

Alla luce delle differenze notevoli tra logica classica e intuizionista, e, soprattutto, data l'ubiquità del principio del terzo escluso nella pratica odierna, è naturale chiedersi quale sia l'impatto dell'adozione della logica intuizionista sulla matematica usuale. Infatti, ci si potrebbe domandare più radicalmente se l'eliminazione del TND non abbia l'effetto indesiderato di preclu-

[17] Questa lettura della nozione di dimostrazione costruttiva era stata proposta già da Kolmogorov (1932).
[18] Si vedano Martin-Löf (1975, 1982, 1984) e Nordström, Petersson, Smith (1990).

dere una qualsiasi forma ragionevole di matematica. Com'è noto, l'introduzione della matematica intuizionista a opera di Brouwer raccolse aspre critiche da parte di autorevoli matematici suoi contemporanei, tra loro Hilbert. Questi, con la sua caratteristica eloquenza, paragonò l'interdizione dell'utilizzo del principio del terzo escluso al divieto dell'uso del pugno per il pugile. Proprio qui si evidenzia il ruolo cruciale di Bishop, il cui lavoro ha messo in luce il potenziale della matematica costruttiva[19].

Un aspetto che distingue Bishop da Brouwer è l'atteggiamento, da parte del primo, meno incline a sottolineare le divergenze tra le due forme di matematica e più propenso a concedere un ruolo alla matematica classica all'interno dell'impresa costruttiva. La matematica classica, infatti, fornisce incentivo per il costruttivista che si prefigge di far emergere il contenuto computazionale presente in ampie porzioni di matematica classica, contenuto che risulta tuttavia ben celato dall'uso di tecniche non costruttive. Compito fondamentale del matematico costruttivo diviene allora procedere ad un'analisi dettagliata della matematica esistente per estrarre da essa la componente algoritmica nascosta. Altro importante aspetto che distanzia la matematica di Bishop da quella di Brouwer è rappresentato dal fatto che la prima può essere caratterizzata dalla sua *compatibilità* con la matematica classica: tutti i teoremi costruttivi sono anche teoremi classici[20]. I testi di Bishop si contraddistinguono inoltre per lo *stile* matematico, che mantiene importanti analogie con quello classico, come, per esempio, l'utilizzazione del ragionamento informale.

3.1 Dimostrazioni

Nonostante gli sforzi di Bishop e dei suoi collaboratori per sottolineare il più possibile l'affinità con la tradizione classica, il passaggio dall'uso della logica classica a quello della logica intuizionista modifica notevolmente la pratica risultante. L'assenza del principio del terzo escluso ha un impatto profondo che si concretizza, per esempio, nella necessità di introdurre nuove tecniche dimostrative accanto a definizioni più sofisticate di quelle classiche. Un aspetto che colpisce particolarmente chi si avvicina alla matematica costruttiva per la prima volta è il fatto che molti enunciati elementari, profondamente radicati nella nostra cultura matematica, enunciati che abbiamo acquisito molto presto nel nostro percorso di apprendimento della disciplina,

[19] Il matematico costruttivo odierno ritiene la censura di Hilbert prematura. Si veda, per esempio, Bridges-Palmgren (2014).
[20] Si veda la Sezione 4.

non sono più validi costruttivamente[21]. Ciò è dovuto al fatto che una loro dimostrazione richiederebbe applicazione del TND. Per esempio non si dimostra costruttivamente che per ogni numero reale r, $r = 0 \vee r \neq 0$; questo perché una dimostrazione costruttiva di tale enunciato dovrebbe fornire un algoritmo che per ciascun numero reale r ci consenta di decidere se $r = 0$ ovvero $r \neq 0$. Ben sappiamo tuttavia che i numeri reali sono oggetti infinitari e per il costruttivista diventa pertanto problematico presupporre di possedere in ogni caso un tale algoritmo. E ancora: si incontrano teoremi fondamentali dell'analisi classica, quali, per esempio, il teorema del valore intermedio, la cui dimostrazione classica fa uso del TND ed è quindi costruttivamente non valida.

Vediamo ora cosa accade di tali enunciati. Se, con il matematico costruttivo, partiamo dalla matematica classica e cerchiamo di "costruttivizzarla", ci rendiamo presto conto che perveniamo a due principali classi di enunciati: una che comprende quegli enunciati che possono essere dimostrati costruttivamente, talvolta, ma non sempre, a seguito di una modifica radicale della dimostrazione classica; e una seconda formata da quegli enunciati che, così come classicamente formulati, non ammettono dimostrazione costruttiva. Anche se questi ultimi sembrerebbero, a prima vista, produrre una mutilazione inaccettabile della risultante matematica, si può far ricorso a strategie efficaci che consentono di aggirare la difficoltà. Si osserva infatti che spesso vi sono *varianti* degli enunciati classici che si dimostrano costruttivamente e sono sufficienti ad ottenere le conseguenze desiderate degli enunciati originali in un certo ambito matematico. Spesso le varianti adottate sono di fatto approssimazioni dei risultati classici, adeguate alle applicazioni desiderate.

Un esempio interessante di strategia è riscontrabile proprio nel caso del teorema del valore intermedio. Qui il matematico costruttivo osserva che l'enunciato del teorema ha la forma di un'implicazione e di conseguenza ipotizza che se ne possono dimostrare varianti ottenibili indebolendone il conseguente oppure rafforzandone l'antecedente. Quale delle due strategie sia opportuno utilizzare verrà deciso caso per caso nel contesto specifico. Si consideri poi che, qualora si assuma il TND, l'"indebolimento" dell'enunciato del teorema classico risulta equivalente ad esso; ovvero, si tratta di indebolimenti soltanto dal punto di vista costruttivo, non da quello

[21] Si tratta di un fenomeno che si manifesta chiaramente, per esempio, in analisi, data la presenza qui di nozioni infinitarie. Teorie più elementari come l'aritmetica sono fondamentalmente più robuste e perciò non mostrano lo stesso livello di divergenza tra pratiche distinte.

classico. Le varianti introdotte, se osservate da un punto di vista classico, non hanno dunque l'effetto di modificare la matematica risultante.

Scaturiscono da questi esempi due considerazioni: il matematico costruttivo deve prestare altissima attenzione alla formulazione degli enunciati e deve saper discernere quali particolari aspetti di un teorema siano necessari per dimostrare altri risultati. Potremmo anche dire che il matematico costruttivo deve saper sfruttare distinzioni non visibili all'occhio del matematico classico, in modo da evidenziare quegli aspetti, preziosi per il proprio processo operativo, nascosti dall'uniformità introdotta dall'applicazione della logica classica. Si comprende dunque anche come nel processo di "costruttivizzazione" della matematica classica il costruttivista operi caso per caso, guidato da una sensibilità, acquisita con la pratica, per gli aspetti algoritmici della matematica.

Un ulteriore aspetto talvolta discusso in comparazioni tra matematica classica e costruttiva è quello della complessità e lunghezza delle dimostrazioni; viene infatti spesso imputato alla pratica costruttiva un incremento in entrambe tali dimensioni. Per esempio in alcune dimostrazioni in cui è necessario analizzare una serie di casi; costruttivamente occorrerà spesso, prima di formulare conclusioni, controllare ciascun ramo del risultante albero dimostrativo, mentre classicamente si possono rapidamente chiudere opzioni inesplorate attraverso applicazione del TND. Tuttavia non sempre si osserva un aumento di complessità o lunghezza delle dimostrazioni. Ricerche in algebra costruttiva effettuate negli ultimi anni hanno evidenziato una tendenza opposta, ovvero dimostrazioni classiche complesse sono state sostituite da dimostrazioni costruttive più veloci e semplici[22]. Fondamentale in questi casi è stata un'analisi puntuale delle dimostrazioni classiche da un punto di vista algoritmico. Si è così osservato che frequentemente enunciati elementari vengono dimostrati attraverso l'impiego di tecniche e nozioni complesse non necessarie. Proprio queste racchiudono la componente non algoritmica della matematica classica. L'indagine costruttiva suggerisce dunque una norma generale che potremmo così riassumere: *teoremi il cui enunciato è elementare sono in genere dimostrabili attraverso metodi ugualmente elementari, evitando l'utilizzo di nozioni e procedure più complesse degli enunciati stessi*. L'applicazione di questa norma generale a numerosi enunciati in algebra commutativa ha consentito di ottenere dimostrazioni costruttive di risultati matematici classici, che sono prima di tutto algoritmiche; molte volte esse sono inoltre più semplici e brevi di quelle originarie, seb-

[22] Si veda Coquand-Lombardi (2006), e, per un'esposizione e ulteriori riferimenti bibliografici, Crosilla-Schuster (2014).

bene di frequente abbiano alla base la medesima idea o costruzione della dimostrazione classica. Il matematico costruttivo sottolinea l'importanza dell'esempio dell'algebra commutativa costruttiva, che studia algoritmicamente gli oggetti matematici, con lo scopo di rilevare aspetti computazionali che sono spesso già impliciti, sebbene nascosti, nella matematica usuale.

3.2 Definizioni

Anche nella scelta delle definizioni matematiche è necessaria una particolare attitudine a saper cogliere gli aspetti algoritmici della matematica. Si è già visto sopra che l'assenza del principio del terzo escluso consente di distinguere nozioni logiche che sono classicamente equivalenti. Un fenomeno analogo si verifica per le nozioni prettamente matematiche. Classicamente si ha spesso la scelta tra un certo numero di caratterizzazioni equivalenti di un concetto matematico ma, qualora l'equivalenza tra queste caratterizzazioni sia dovuta al principio del terzo escluso, essa è in genere indimostrabile in matematica costruttiva. Il matematico costruttivo introdurrà pertanto distinzioni che il matematico classico non percepisce; ciò è considerato punto di forza da parte del costruttivista, che sottolinea il conseguente vantaggio di non omologare nozioni che sono spesso il risultato di intuizioni profondamente distinte. Per il costruttivista l'omissione del TND ha quindi l'effetto immediato di consentire la distinzione di caratterizzazioni intuitivamente diverse di un concetto matematico. La maggior raffinatezza della matematica costruttiva ha tuttavia un prezzo, poiché si pone il problema della scelta di quale tra le alternative classiche sia la nozione da adoperare costruttivamente[23]. Di frequente distinte varianti di un concetto classico trovano applicazione in contesti differenti, ed è l'esperienza del matematico costruttivo che consente di cogliere rapidamente a quale nozione ricorrere in ciascun ambito.

[23] La scelta tra opzioni diverse si manifesta anche nel caso delle teorie fondazionali che sono state introdotte per chiarire e codificare la pratica costruttiva. Qui a partire dagli anni '70 sono state sviluppate teorie dei tipi (Martin-Löf 1975, 1984; Dybjer, Palmgren 2016), versioni intuizioniste della teoria degli insiemi Zermelo-Fraenkel (Myhill 1973, 1975; Aczel 1978) e la matematica esplicita di Feferman (1975). Si veda Crosilla (2014) per una esposizione di teorie degli insiemi alla Zermelo-Fraenkel che sottolinea la complessità della scelta tra assiomi alternativi.

4. Varietà di matematiche costruttive e compatibilità

La matematica costruttiva di Bishop è oggi la forma dominante di matematica costruita sulla base della logica intuizionista, sebbene non sia l'unica. Vi sono in particolare due altre varianti di matematica intuizionista che precedono storicamente quella alla Bishop: quella intuizionista di Brouwer e quella costruttiva computazionale della scuola Russa. Come accennato sopra, Brouwer fu il primo a proporre una forma di matematica che utilizza la logica intuizionista[24]. A partire dagli anni '40, il russo Andrei Markov propose ancora un'altra forma di matematica che impiega la logica intuizionista in sostituzione di quella classica[25]. La principale motivazione del costruttivismo Russo è quella di sviluppare una versione di matematica computazionale o algoritmica.

In seguito farò uso della seguente terminologia: indicherò con *matematica costruttiva* (simpliciter) quella introdotta da Bishop, con *matematica intuizionista* quella che prende origine nell'opera di Brouwer, e con *matematica costruttiva Russa* quella che scaturisce a partire dal lavoro di Markov.

Vi sono differenze profonde tra questi tre tipi di matematiche non-classiche. Una differenza tra le tradizioni intuizionista e Russa da una parte e la matematica costruttiva di Bishop, dall'altra, è data dal fatto che le prime introducono principi che comportano un conflitto con la tradizione classica, mentre l'ultima è del tutto compatibile con essa. Per esempio, Brouwer, a partire da (Brouwer 1912) propose una versione non-classica del continuo attraverso l'introduzione della nozione di *free choice sequence*[26]. Queste sono essenzialmente sequenze infinite di numeri razionali create dal matematico con lo scopo di rappresentare i numeri reali, ma differiscono da altre rappresentazioni più standard dei numeri reali come, per esempio, le successioni di Cauchy, per il fatto che non viene richiesto l'adempimento ad una regola o legge preventivamente fissata. In altre parole, le *free choice sequences* sono create liberamente dal soggetto pensante che, passo passo, produce ulteriori specificazioni di tali sequenze senza essere vincolato da alcuna regola a priori. Per il loro concreto utilizzo, tuttavia, le *free choice sequences* richiedono l'introduzione, al di là della logica intuizionista, di principi di scelta e continuità che hanno conseguenze importanti: essi consentono di dedurre proprietà valide nel risultante continuo intuizionista ma

[24]Si vedano, per esempio, Brouwer (1975), Heyting (1971), Troelstra (1973,1977). Per un confronto fra le tre varietà di matematica basate sulla logica intuizionistica, si vedano Bridges-Richman (1987) e Troelstra-van Dalen (1988).
[25]Si vedano, per esempio, Markov (1954), Kushner (1958).
[26]Si veda, per esempio, Troelstra (1973) e, per un'esposizione informale, van Atten (2007).

classicamente false, quali, ad esempio, la continuità di ogni funzione con argomento e valore nei numeri reali.

Anche la matematica Russa dà origine a conflitto con quella classica, poiché introduce un principio, la Tesi di Church costruttiva, che ha come effetto di rendere effettivamente calcolabile (nel senso della teoria della ricorsività) ogni funzione definibile. Il costruttivismo Russo sviluppa dunque una versione di matematica *ricorsiva* sulla base della logica intuizionista[27].

La matematica costruttiva di Bishop si differenzia da questi suoi predecessori poiché non introduce alcun principio che vada al di là della tradizione classica. Cioè, il distacco fondamentale dalla tradizione classica consiste nell'utilizzazione di una logica più debole, che, da sola, consente di ottenere una forma di matematica "algoritmica". Contrariamente alla matematica intuizionista quella costruttiva alla Bishop non introduce principi non-classici di continuità e scelta, dando luogo a una nozione del tutto particolare di continuo; inoltre, in contrapposizione a quella Russa, non si limita allo studio di oggetti computazionali secondo una nozione specifica di algoritmo e calcolabilità. Indicherò quest'ultimo fenomeno con il termine "compatibilità": la matematica costruttiva alla Bishop è pienamente compatibile con quella classica, nel senso che tutti i suoi teoremi sono anche teoremi classici. Essa è inoltre compatibile con le altre varietà matematiche fondate sulla logica intuizionista[28].

[27] Per questo esso ha importanti connessioni con un'altra tradizione matematica importante, quella dell'analisi ricorsiva classica, in cui, sulla base della logica classica, si studiano le funzioni ricorsive sui reali (si veda, per esempio, Weirauch (2000)).

[28] Si osservi che la compatibilità non preclude tuttavia di ottenere una forma di matematica che si sviluppa in modi nuovi rispetto a quella classica. Come osservato nella Sezione precedente l'utilizzo della logica intuizionista consente di sviluppare interessanti generalizzazioni delle nozioni classiche. Per esempio, un filone importante di ricerca emerso a partire dagli anni `80 è quello della topologia formale (si vedano Sambin (1987, 2003), Coquand (2009)). Essa sviluppa in modo costruttivo e predicativo idee scaturite a partire dagli inizi del `900, poi ulteriormente chiarificate e generalizzate all'interno della teoria delle categorie (per una esposizione informale e riferimenti bibliografici si veda Johnston (1983)). In topologia formale l'ordine concettuale della topologia standard viene capovolto, in quanto il concetto di aperto di una base di intorni è primitivo e consente di definire quello di punto. Per esempi di applicazioni di questo approccio al caso dei numeri reali si vedano Cederquist-Negri (1996) e Cederquist-Coquand-Negri (1998).

4.1 Matematica costruttiva come nucleo centrale delle varietà matematiche

Possiamo rendere più precise queste osservazioni se consideriamo le pratiche classiche, intuizioniste e Russe come distinte estensioni della matematica costruttiva. Ovvero, se indichiamo con BISH la matematica costruttiva alla Bishop, la pratica intuizionista può essere connotata da BISH + Principi Intuizionisti, rappresentando questi ultimi opportune codifiche della teoria delle *choice sequences*, inclusi conformi principi di continuità. Parimenti, la matematica Russa può essere indicata come BISH + Principi di Ricorsività, dove questi ultimi rappresentano specifiche assunzioni, tipiche della scuola Russa, che consentono di pervenire ad una forma ricorsiva di matematica. Possibili candidati di Principi di Ricorsività sono la Tesi di Church costruttiva e il cosiddetto principio di Makov[29]. La matematica classica, infine, può essere codificata come BISH + TND. Da quanto esposto consegue che la matematica alla Bishop costituisce di fatto un'intersezione tra questi differenti tipi di matematica, ed è compatibile con ciascuno di essi.

Quest'ultima considerazione ha dato luogo a un programma particolarmente vivace nell'ultimo decennio, programma che prende il nome di *Constructive Reverse Mathematics* (CRM)[30]. Esso trae ispirazione dal programma classico di *Reverse Mathematics* ideato da Friedman e Simpson[31], finalizzato ad un'analisi della matematica classica da un punto di vista logico, allo scopo di palesare quali principi siano indispensabili per dimostrare teoremi usuali. Si riesce così a confrontare la forza reciproca di teoremi matematici, misurata in relazione a teorie formali sufficientemente deboli. Nel caso del programma CRM l'idea è di utilizzare la *matematica costruttiva come base*, in quanto dal "suo" punto di vista "neutrale" si possono confrontare i diversi approcci alla matematica. Nel caso, per esempio, della matematica classica, questo approccio consente di pervenire ad un'analisi dettagliata dei teoremi classici, individuando in modo preciso quali loro componenti sono essenzialmente non costruttive, e quindi non suscettibili ad una interpretazione computazionale diretta[32].

---

[29] Si vedano Bridges, Richman (1987); Troelstra, van Dalen (1988).

[30] Si vedano Ishihara (2005, 2006), Veldman (2005), e, per una panoramica di risultati recenti, Bridges, Palmgren (2014).

[31] Si veda, per esempio, Simpson (1999).

[32] Il termine "diretto" indica il fatto che il linguaggio costruttivo, per esempio nella formulazione della teoria costruttiva dei tipi, può essere letto immediatamente come linguaggio di programmazione. Vi sono studi recenti volti a chiarire la possibilità di fornire contenuto computazionale a dimostrazioni classiche. Qui spesso si utilizzano (implicitamente) forme di traduzione di teorie da classiche a intuizioniste, che fanno uso di tecniche quali, per

5. Motivazioni per lo sviluppo costruttivo della matematica

Gli accenni alla matematica costruttiva esposti nelle sezioni precedenti mettono in luce profonde differenze con la matematica classica, ma evidenziano anche la maggiore affinità con essa rispetto alla matematica che scaturisce direttamente dall'intuizionismo Broweriano. Sorge dunque un interrogativo naturale: quale è la relazione tra questa pratica matematica e la filosofia della matematica? Data la tradizionale alleanza tra forme di anti-realismo in filosofia della matematica e logica intuizionista, viene spontaneo chiedersi quale sia la relazione tra la matematica costruttiva e tali posizioni. Un'indagine filosofica dettagliata di questa forma di matematica che chiarisca quali posizioni filosofiche siano compatibili con essa e con l'atteggiamento espresso dai suoi fautori va ben al di là di questa breve panoramica[33]. Vorrei tuttavia concludere con un accenno alle motivazioni che alcuni matematici costruttivi hanno addotto per giustificare il loro allontanamento dalla tradizione classica. Queste costituiscono un primo tentativo di chiarire la posizione filosofica della matematica costruttiva e aprono la strada per ulteriori riflessioni filosofiche sulla stessa.

Un aspetto importante della tradizione matematica indotta dal testo di Bishop (1967), è che essa, in generale, sembra non fare appello diretto a posizioni filosofiche specifiche; piuttosto il matematico costruttivo alla Bishop invoca considerazioni che, in mancanza di miglior terminologia, potremmo chiamare *interne* e *pragmatiche*. Per tale aspetto la matematica costruttiva alla Bishop differisce profondamente dall'approccio di Brouwer, che, come accennato nella Sezione 2, deriva da una visione della matematica come attività libera del pensiero umano e da specifiche e complesse posizioni filosofiche. La matematica di Bishop si diversifica anche da posizioni filosofiche più recenti che, sulla base di considerazioni che scaturiscono dalla filo-

esempio, la doppia negazione, allo scopo di conferire contenuto computazionale a risultati classici.

[33] La questione della relazione tra pratica costruttiva e filosofia della matematica è particolarmente complessa per due motivi distinti: anzitutto non vi è uniformità di vedute tra quei matematici che operano all'interno di questa tradizione e che hanno espresso posizioni filosofiche; in secondo luogo alcuni degli autori che hanno manifestato in modo più diretto il proprio pensiero hanno spesso solo rapidamente delineato le proprie intuizioni, in modo tale che non sempre risulta possibile estrarne una coerente posizione filosofica. Si veda per esempio l'analisi critica della "filosofia" di Bishop proposta da Billinge (2003). Si noti tuttavia che si possono annoverare eccezioni in quanto, ad esempio, vere e proprie posizioni filosofiche si evincono dai lavori di Per Martin-Löf.

sofia del linguaggio, hanno proposto la difesa della logica intuizionista come unica logica corretta[34].

La matematica costruttiva si distingue da entrambe tali posizioni anche per l'enfasi posta sulla compatibilità con la matematica classica e per il suo proporsi come strumento di indagine classica.

Nella parte seguente delineerò due tipi principali di moventi addotti da matematici costruttivi: ragioni interne alla matematica e ragioni pragmatiche[35]. Le prime rappresentano proprietà desiderabili della matematica costruttiva e si fondano, come già sottolineato, sulla compatibilità della matematica costruttiva con quella classica. Un esempio è la generalità. Le seconde si basano invece sulla compatibilità della matematica costruttiva con interpretazioni algoritmiche dei concetti matematici, mettendo in rilievo la natura computazionale di questa pratica.

5.1 Motivazioni interne: Richman, la Generalizzazione e la Finezza

In una serie di articoli espositivi Fred Richman (1990,1996) ha sottolineato in modo particolarmente marcato l'importanza della compatibilità della matematica costruttiva con quella classica. Come visto sopra, la matematica alla Bishop introduce restrizioni sulla nozione di dimostrazione determinate dall'uso esclusivo della logica intuizionista[36]. Richman trae interessanti conseguenze da questo fatto: rispetto alla matematica classica, in quella costruttiva non intervengono restrizioni sul tipo di oggetti studiati, ma solo sulle modalità di ragionamento usato nello studiarli. Ovvero, la matematica di Bishop studia con metodologia costruttiva, caratterizzata dalla restrizione alla logica intuizionista, gli oggetti *usuali* della tradizione matematica classica. Emerge qui una differenza con altri tipi di matematiche non standard, come, per esempio, quella ricorsiva. Esse infatti impongono, secondo Richman, delle restrizioni sull'ontologia stessa della matematica rispetto alla matematica classica. Tali restrizioni sono indotte dall'assunzione di particolari principi non-logici, che hanno l'effetto di circoscrivere il dominio del discorso a

[34] Qui una differenza importante si rileva tra le posizioni espresse da Bishop, Richman e Bridges e il pensiero di Martin Löf, che invece ha chiare affinità con tale tradizione. Per una discussione su tale tradizione costruttiva si vedano i profili di Dummett (Moriconi 2012) e di Prawitz (Tranchini 2014) in questa rivista.

[35] Principale riferimento nella discussione seguente sono i testi di Richman (1990,1996), Bishop (1967) e Bridges-Palmgren (2014).

[36] Il termine "esclusivo" indica il fatto che la matematica costruttiva non introduce ulteriori principi che inducano conflitto con la matematica classica, come chiarito nella Sezione precedente.

particolari oggetti che soddisfano condizioni specifiche. Per esempio, nel caso delle matematiche ricorsive, si studiano non tutti i numeri reali ma solo quelli ricorsivamente definibili; ossia si studiano i reali ricorsivi. Richman sottolinea enfaticamente che nel caso della matematica costruttiva si studiano *non i reali costruttivi, ma i reali, costruttivamente*[37].

Le precedenti considerazioni portano Richman a sostenere che la matematica costruttiva possiede una virtù molto apprezzata dai matematici: la "generalità". La matematica costruttiva è vista come generalizzazione sia della matematica classica che delle altre varianti fondate sulla logica intuizionista. Richman usa un'analogia tratta dall'algebra: la teoria dei gruppi è più generale della teoria dei gruppi Abeliani, poiché quest'ultima ha assiomi aggiuntivi di commutatività. Similmente, la matematica costruttiva è più generale di quella classica, perché basata su un minor numero di assunzioni e quindi in grado di descrivere situazioni più generali[38]. La matematica classica diviene dunque un particolare caso di quella costruttiva, in modo analogo a quanto avviene nel caso dei gruppi[39].

Richman è chiaramente consapevole che per questo stesso motivo la matematica costruttiva è meno "forte" di quella classica, nel senso che non dimostra numerosi teoremi classici. Ciononostante, come già affermato in precedenza, il matematico costruttivo può fornire dimostrazioni di risultati classici semplicemente premettendo appropriati principi classici ai suoi enunciati. Ovvero, se vi è un teorema, ϕ, che vale classicamente ma non costruttivamente, il matematico costruttivo può "catturare" il contenuto classico dimostrando l'implicazione TND $\rightarrow \phi$. Normalmente, come sottolineato dalla *Constructive Reverse Mathematics*[40], la dimostrazione costruttiva ambirà altresì ad una maggiore ricercatezza, puntando ad individuare conseguenze *minimali* del TND che siano però sufficienti ad ottenere ϕ, così da mostrare chiaramente le assunzioni e i passaggi non costruttivi.

---

[37] La discussione di Richman sembra suggerire un'assunzione implicita da parte del matematico Americano, secondo cui il cambio di logica da classica a intuizionista è neutrale rispetto all'ontologia della matematica, qualunque posizione filosofica si mantenga rispetto ad essa. Al contrario, l'assunzione di specifici assiomi di natura matematica (piuttosto che logica) può avere un impatto diretto su quali oggetti matematici la teoria contempli. Una tesi di questo tipo richiederebbe attenta argomentazione.

[38] Richman esprime questo fatto scrivendo che la matematica costruttiva ha "più modelli" di quella classica.

[39] Il fatto che teorie matematiche classiche, come, per esempio, l'aritmetica di Peano, possano essere interpretate in corrispondenti teorie intuizioniste grazie a traduzioni della doppia negazione (si veda Sezione 1), è spesso addotto ad ulteriore conferma della maggior generalità della matematica costruttiva.

[40] Si veda Sezione 4.1.

Come visto sopra, una delle conseguenze principali dell'eliminazione del TND dalla pratica matematica è la proliferazione di concetti matematici. Ciò comporta da un lato una complessità maggiore del lavoro costruttivo, ma consente peraltro una più raffinata analisi concettuale, che il matematico costruttivo ritiene preziosa. L'uso di una logica più debole, infatti, consente di riconoscere queste sottili distinzioni e scegliere, tra le nozioni classicamente equivalenti, quelle più adatte a un determinato contesto; consente inoltre di preservare le differenze che percepiamo tra le intuizioni che hanno dato luogo a ciascuna nozione. Il risultato, sottolinea il matematico costruttivo, è una forma di matematica più sottile e raffinata.

Alla luce di queste argomentazioni favorevoli alla matematica costruttiva, è naturale chiedersi se esse saranno sufficienti per indurre il matematico classico ad abbandonare la propria pratica e intraprendere quella costruttiva. Il sostenitore della matematica classica contesterà, al proposito, la complessità aggiuntiva che viene introdotta con la proliferazione di concetti e confuterà la scarsa eleganza della matematica risultante. Egli potrà sottolineare che la matematica classica è dotata di un altro pregio, anch'esso assai caro al matematico: l'unificazione. Teoremi che dimostrano l'equivalenza di differenti caratterizzazioni di un concetto sono considerati estremamente importanti nella tradizione matematica proprio per il loro ruolo unificante. Il convergere di diverse caratterizzazioni di un concetto, inoltre, fornisce conferma della sua rilevanza all'interno del panorama matematico, così che teoremi di quel tipo rivestono funzione di corroborazione dei concetti stessi.

Non solo, ma il sostenitore della matematica classica insisterà qui per un ribaltamento dell'immagine della generalizzazione: se si guarda ai teoremi, piuttosto che ai "modelli", la matematica costruttiva è una sotto-teoria di quella classica[41].

Sembra pertanto che sussista una forma di tensione tra le virtù di generalizzazione e unificazione, così che costruttivista e difensore della matematica classica potranno assumere posizioni opposte nel valutare quale delle due forme debba essere privilegiata. Nell'analisi di queste contrapposte posizioni possono essere chiamate in causa altre caratteristiche che generalmente auspichiamo siano presenti nelle teorie scientifiche quali: semplicità, eleganza, chiarezza di formulazione. Possiamo tuttavia supporre che ciascuno schieramento potrà produrre esempi di dimostrazioni che accreditino la propria pratica rispetto all'opposta anche prendendo in considerazione tali proprietà.

[41] Se veda per esempio, Tait (1983), per una caratterizzazione della matematica costruttiva come parte di quella classica.

Sembrerebbe dunque che le motivazioni interne abbiano un impatto limitato e che possano suggerire la preferibilità di metodi costruttivi in certi contesti, ma non in generale: potranno forse indurre alcuni matematici a modificare la propria pratica, ma non altri. Ovvero, è difficile che il costruttivista riesca a persuadere la controparte a seguire il suo esempio abbandonando il TND esclusivamente sulla base di questi tipi di argomentazioni. Sono dunque necessari ulteriori argomenti a favore della matematica costruttiva, e la calcolabilità della risultante forma di matematica sarà la più naturale carta da giocare.

5.2 Motivazioni pragmatiche: Calcolabilità

Il motivo principale per lo sviluppo della matematica costruttiva, quello più fortemente evidenziato da Bishop e da tutti i suoi seguaci è il fatto, menzionato sopra, che i teoremi costruttivi, a differenza di quelli classici, possono essere dotati di significato computazionale diretto. Questa prerogativa procura una ragione pratica per favorire la matematica costruttiva rispetto a quella classica. Si noti, tuttavia, che spesso la motivazione pratica si allea con una diversa motivazione, di natura epistemologica, che riconosce al metodo costruttivo un vantaggio rispetto a quello classico. La disposizione positiva verso una forma di matematica algoritmica sembra determinata anche dalla preferenza per un particolare *stile* che considera fondamentale l'informazione computazionale aggiuntiva fornita dalla logica intuizionista. Sussistono varie possibili motivazioni per questa preferenza. Ad esempio alcuni matematici sottolineano la maggior garanzia di correttezza di una matematica algoritmica, poiché l'algoritmo assicura un metodo di controllo intersoggettivo (o meccanizzabile) della dimostrazione. Altri paiono trovare più consono al proprio modo di pensare una matematica algoritmica a causa della sua maggior "concretezza": gli oggetti principali possono essere letti come algoritmi, funzioni, che, per quanto non pienamente concreti (poiché in genere non *feasible*) mancano della tipica astrattezza di molte nozioni insiemistiche classiche.

Un'analisi della situazione suggerisce dunque che la preferenza per un tipo di matematica piuttosto che per l'altro, quando non è puramente determinata da motivazioni "parrocchiali", ovvero, dall'abitudine ad un modo di ragionare piuttosto che all'altro, è principalmente dovuta ad una diversa percezione dell'importanza della calcolabilità in matematica. Al proposito il costruttivista proporrà due tipi di argomento per la centralità della calcolabilità: uno di tipo epistemologico e uno pragmatico. Il primo sottolinea l'importanza della calcolabilità per la comprensione della matematica e per la sua corretta esecuzione. Il secondo enfatizza i vantaggi pratici che conseguono dalla disponibilità di interpretazioni computazionali. Proprio in relazione a quest'ultimo aspetto si collocano le osservazioni fatte nella prima sezione. Si presume infatti che se l'evoluzione attualmente in corso nell'informatica teorica produrrà a breve un cambiamento nella percezione di quanto gli aspetti computazionali siano rilevanti per il progresso e matematico e informatico, allora la matematica costruttiva acquisirà un ruolo di maggiore centralità nel panorama matematico generale.

Vorrei concludere con un'ultima nota: la matematica alla Bishop, come esposto sopra, si propone come matematica algoritmica, in grado di portare alla luce il contenuto computazionale nascosto nella pratica classica dominante. L'utilizzo della logica intuizionista, come osservato, la mette in stretto contatto con tradizioni filosofiche che hanno sostenuto non soltanto che la logica intuizionista è adeguata per lo sviluppo di una forma di matematica interessante, ma, altresì, che la logica intuizionista sia l'unica logica corretta. Le motivazioni a favore della matematica alla Bishop riportate in precedenza non mostrano, tuttavia, sufficiente forza per giustificare il rifiuto della matematica classica. Non solo, ma il matematico costruttivo si dichiara interessato a utilizzare la propria prospettiva per una chiarificazione della pratica classica e fa uso costante della pratica classica come punto di partenza nella propria opera di "costruttivizzazione" della matematica.

Data una certa popolarità di forme di pluralismo nella filosofia contemporanea, è naturale chiedersi se la posizione filosofica più appropriata per un costruttivista alla Bishop sia una forma di eclettismo (o pluralismo). L'ascrizione di una forma di eclettismo al matematico costruttivo non è tuttavia soddisfacente. Il matematico costruttivo, sebbene conceda legittimità alla logica classica, esprime chiara preferenza per quella costruttiva. Non nega valore alla matematica classica, ma insiste nell'importanza dell'impresa costruttiva. Risulta dunque difficile inserire in modo definitivo il matematico costruttivo odierno in un preciso schema filosofico; ulteriori indagini sono necessarie per meglio comprendere quali posizioni filosofiche siano compatibili con la matematica costruttiva alla Bishop.

Bibliografia

Aczel P., 1978, «The Type Theoretic Interpretation of Constructive Set Theory», in MacIntyre A., Pacholski L., Paris J. (a cura di), *Logic Colloquium '77*, North-Holland, Amsterdam-New York, pp. 55-66.

van Atten M., 2009, «The Development of Intuitionistic Logic», *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. On-line: http://plato.stanford.edu/entries/intuitionistic-logic-development/.

Beeson M., 1985, *Foundations of Constructive Mathematics*, Springer Verlag, Berlin.

Billinge H., 2003, «Did Bishop have a philosophy of mathematics?», *Philosophia Mathematica*, 11, 2, pp. 176-194.

Bishop E., 1967, *Foundations of constructive analysis*, McGraw-Hill, New York.

Bishop E., Bridges D. S., 1985, *Constructive Analysis*, Springer, Berlin and Heidelberg.

Bishop E., Cheng H., 1972, *Constructive Measure Theory*, Vol. 116, Memories of the American Mathematical Society, Providence R. I.

Bridges D. S., Palmgren E., 2014, «Constructive mathematics», *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. On-line: http://plato.stanford.edu/entries/mathematicsconstructive/.

Bridges D. S., Richman F., 1987, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bridges D. S., Vîţă L. S., 2006, *Techniques of Constructive Analysis*, *Universitext*, Springer, New York.

Brouwer L. E. J., 1907, *On the Foundations of Mathematics*, Thesis, Amsterdam; English translation in Heyting (ed.) 1975, pp. 11-101.

Brouwer L.E.J., 1908, «De onbetrouwbaarheid der logische principes», *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, 2, pp. 152-158. English translation in Brouwer, 1975, pp. 107-111.

Brouwer L. E. J., 1975, *Collected Works 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, in Heyting A. (ed.), North-Holland, Amsterdam.

Cederquist J., Negri, S., 1996, «A constructive proof of the Heine-Borel covering theorem for formal reals», in Berardi S., Coppo M. (a cura di), *Types for Proofs and Programs*, Lecture Notes in Computer Science 1158, pp. 62-75, Springer Verlag, Berlin.

Cederquist J., Coquand T., Negri S., 1998, «The Hahn-Banach Theorem in Type Theory», in Sambin G., Smith J. (a cura di), *Twenty-Five Years of Constructive Type Theory*, Oxford University Press, Oxford, pp. 57-72.

Claude C. S., Ishihara H., 2005, «Constructivity, Computability, and Logic: a Collection of Papers in Honour of the 60th Birthday of Douglas Bridges», *Journal of Universal Computer Science*, 11, 12, pp. 1863-2191.

Coquand T., Lombardi H., 2006, «A logical approach to abstract algebra», *Math. Struct. in Comput. Science*, 16, pp. 885-900.

Coquand T., 2009, «Space of valuations», *Annals of Pure and Applied Logic*, 157, 2, pp. 97-109.

Crosilla L., 2014, «Set Theory: Constructive and Intuitionistic ZF», *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, On-line: http://plato.stanford.edu/entries/set-theory-constructive/.

Crosilla L., Schuster P., (a cura di), 2005, *From Sets and Types to Topology and Analysis: Towards Practicable Foundations for Constructive Mathematics*, Vol. 48 of *Oxford Logic Guides*, Oxford University Press, Oxford.

Crosilla L., Schuster P., 2014, «Finite Methods in Mathematical Practice», in Link G. (a cura di), *Formalism and Beyond. On the Nature of Mathematical Discourse*, Walter de Gruyter, Boston-Berlin.

Dybjer P., Palmgren E., 2016, «Intuitionistic Type theory», *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. On-line: http://plato.stanford.edu/entries/type-theory-intuitionistic/.

Feferman S., 1975, «A language and axioms for explicit mathematics», in Crossley J. (a cura di), *Algebra and Logic* (Lecture Notes in Mathematics 450), Springer, Berlin, pp. 87-139.

Franchella M., 2016, «Luitzen Egbertus Jan Brouwer», *APhEx 13*. On-line: http://www.aphex.it/index.php?Profili=557D030122007403210404037777327.

Friedman H., 1973, «The consistency of classical set theory relative to a set theory with intuitionistic logic», *Journal of Symbolic Logic*, 38, 2, pp. 315-319.

Gentzen G., 1935, «Untersuchungen über das logische Schliessen I», *Mathematische Zeitschrift*, 39, 1 pp. 176-210.

Heyting A, 1971, *Intuitionism: an Introduction*, North Holland, Amsterdam.

Ishihara H., 2005, «Constructive reverse mathematics: compactness properties», in Crosilla L., Schuster P., (a cura di), *From Sets and Types to Topology and Analysis,* Oxford University Press, Oxford, pp. 245-267.

Ishihara H., 2006, «Reverse mathematics in Bishop's constructive mathematics», *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences,* CS 6, pp. 43-59.

Johnstone P., 1983, «The Point of Pointless Topology», *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 8, Number 1, pp. 41-53.

Kleene S. C., 1945, «On the Interpretation of Intuitionistic Number Theory», *Journal of Symbolic Logic*, 10, 4, pp. 109-124.

Kolmogorov A., 1925, «O principe tertium non datur», *Matematiceskij Sbornik*, 32, pp. 646-667. English translation in van Heijenoort 1967, pp. 416-437.

Kolmogorov A., 1932, «Zur Deutung der intuitionistischen Logik», *Mathematische Zeitschrift*, 35, pp. 58-65. English translation in Mancosu 1998, pp. 328-334.

Kushner B., 1985, *Lectures on Constructive Mathematical Analysis*, American Mathematical Society, RI, Providence.

Lombardi H., Quitté C., 2015, *Commutative Algebra: Constructive Methods*, Springer Netherlands.

Mancosu P., 1998, *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, Oxford.

Markov A.A., 1954, *Theory of Algorithms*, Trudy Mat. Istituta imeni V.A. Steklova, vol. 42, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, Moskva.

Martin-Löf P., 1975, «An intuitionistic theory of types: predicative part», in Rose H. E., Sheperdson J. (a cura di), *Logic Colloquium '73*, North-Holland, Amsterdam, pp. 73-118.

Martin-Löf P., 1982, «Constructive mathematics and computer programming», in Choen L. J. (a cura di), *Logic, Methodology, and Philosophy of Science VI*, North–Holland, Amsterdam.

Martin-Löf P., 1984, *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis, Naples.

Mines R., Richman F., Ruitenburg W., 1988, *A Course in Constructive Algebra*, Universitext, Springer, New York.

Moriconi E., 2012, «Michael Dummett», *APhEx 6*. On-line: http://www.aphex.it/index.php?Profili=557D0301220074032107060777052771.

Myhill J., 1973, «Some properties of Intuitionistic Zermelo-Fraenkel set theory», in Mathias A. R. D., Rogers H. (a cura di), *Proceedings of the 1971 Cambridge Summer School in Mathematical Logic* (Lecture Notes in Mathematics 337), Springer, Berlin, pp. 206-231.

Myhill J., 1975, «Constructive set theory», *Journal of Symbolic Logic*, 40, 3, pp. 347-382.

Nordström B., Petersson K., Smith J. M., 1990, *Martin-Löf's Type Theory*, Clarendon Press, Oxford.

Richman F., 1990, «Intuitionism as generalization», *Philosophia Mathematica*, 5, pp. 124-128.

Richman F., 1996, «Interview with a constructive mathematician», *Modern Logic*, 6, pp. 247-271.

Sambin G., 1987, «Intuitionistic Formal Spaces – A first communication», in Skordev D. (a cura di), *Mathematical Logic and its Applications*, Plenum Press, New York, pp. 187-204.

Sambin G., 2003, «Some points in formal topology», *Theoretical Computer Science,* vol. 305, (1-3), pp. 347-408.

Simpson S. G., 1999, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, *Perspectives in Mathematical Logic*, Springer-Verlag, Berlin.

Tait W. W., 1983, «Against intuitionism: Constructive mathematics is part of classical mathematics», *Journal of Philosophical Logic*, 12, 2, pp. 173-195.

Tranchini L., 2014, «Dag Prawitz», *APhEx 9*. On-line: http://www.aphex.it/index.php?Profili=557D0301220074032107000 3777327.

Troelstra A.S., 1973, *Metamathematical investigations of intuitionistic arithmetic and analysis*, (Lecture Notes in Mathematics: Volume 344), Berlin: Springer.

Troelstra A.S., 1977, *Choice sequences* (Oxford Logic Guides), Clarendon Press, Oxford.

Troelstra A. S., van Dalen D., 1988, *Constructivism in Mathematics: an Introduction,* Vol. I-II, North-Holland, Amsterdam.

Weihrauch K., 2000, *Computable Analysis*, Springer–Verlag, Heidelberg.

Univalent Foundations Program, (2013), *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, Institute for Advanced Study. On-line: https://homotopytypetheory.org/book/.

Veldman W., 2005, «Brouwer's Fan Theorem as an Axiom and as a Contrast to Kleene's Alternative», preprint, Radboud University, Nijmegen.

Weihrauch K., 2000, *Computable Analysis*, Springer-Verlag, Heidelberg.