APhEx 14, 2016 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 1/03/2016
Accettato il: 19/09/2016
Redattore: Valeria Giardino

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK
N°14 GIUGNO 2016

P R O F I L I

BERNARD BOLZANO

Pauline van Wierst

*Bernard Bolzano (*1781 – 1848*) è probabilmente il pensatore più sottovalutato dell'Ottocento. Ha anticipato di cent'anni la definizione semantica di verità e di conseguenza logica di Tarski, ha dato alla logica e alla matematica una nuova e rigorosa fondazione, e ha fornito la prima analisi dettagliata di spiegazione scientifica. In matematica ha ottenuto risultati che vengono insegnati ancora oggi in ogni classe di matematica delle scuole superiori, come il teorema di Bolzano-Weierstrass e la prima prova rigorosa del teorema dei valori intermedi. A causa dell'isolamento dalla communità accademica, del divieto di pubblicare e delle premature anticipazioni, le sue opere (in particolare quelle filosofiche) non ottennero ai suoi tempi l'attenzione che avrebbero invece meritato. In questo profilo ci proponiamo principalmente di presentare i suoi contributi in merito alla metodologia scientifica. Considereremo sia le sue riflessioni in proposito, sia le idee innovative che in tali riflessioni trovarono la loro origine. In particolare, vedremo in che modo tali riflessioni lo hanno portato a sviluppare diverse nozioni di* conseguenza logica*, una nozione altamente originale della distinzione* analitico/sintetico*, una caratterizzazione della* spiegazione scientifica*, nonché una teoria dei numeri fondata su una teoria degli insiemi e delle parti. A tal fine, verrà presentata una selezione delle sue idee metafisiche, logiche e matematiche che, lungi dal potersi considerare esaustiva, risulta tuttavia indispensabile all'esposizione e comprensione di questi contenuti in chiave sistematica.*

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

1. INTRODUZIONE
2. VITA E VITA ACCADEMICA
3. METAFISICA
   3.1 L'UNIVERSO DI BOLZANO
   3.2 PROPOSIZIONI
   3.3 INTERI E PARTI
4. LA LOGICA COME TEORIA DELLA SCIENZA
   4.1 UNA LOGICA PROPOSIZIONALE
   4.2 IL METODO DELLA VARIAZIONE
   4.3 SPIEGAZIONE SCIENTIFICA O *grounding*
5. LA MATEMATICA E IL SUO METODO
   5.1 GLI OGGETTI MATEMATICI
   5.2 L'INFINITO
6. PER CONCLUDERE
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI
OPERE DI LETTERATURA SECONDARIA CITATE

1. INTRODUZIONE

Non è facile selezionare i contenuti per un profilo di Bernard Bolzano. Le sue opere sono insolitamente versatili e piene di idee originali, interessanti e influenti. Ho scelto di concentrarmi sulle opere logiche e matematiche, e sulla metafisica che egli sviluppa al fine di costruire una fondazione rigorosa per le scienze. Forse questi sono i terreni nei quali gli scritti di Bolzano si sono rivelati più influenti. Sarebbe sbagliato, però, vedere Bolzano semplicemente come un logico e matematico. Fu infatti professore di dottrina religiosa, e il libro di testo in quattro volumi della *Scienza della Religione* può essere considerato come una delle sue tre opere principali (Sebestik [2007]). Bolzano ha scritto inoltre di etica, estetica, filosofia politica e sociale, metafilosofia, scienze naturali, e soggetti metafisici come l'immortalità dell'anima.
In questo profilo il mio obiettivo sarà quello di presentare le idee metafisiche, logiche e matematiche di Bolzano nel modo più interessante dal punto di visto sistematico; lo sviluppo di tali idee e la loro posizione all'interno della storia della filosofia sarà toccato solo marginalmente. Inizieremo questo profilo con una breve descrizione della vita di Bolzano, nella sezione 2.. Nella sezione

3., presenterò la sua metafisica, limitatamente ai quegli aspetta che saranno poi rilevanti ai fini della fondazione delle scienze. Per dare alle scienze una rigorosa fondazione, Bolzano svilupò una logica che, a sua volta, si basa su considerazioni riguardo a diversi tipi di oggetti, alle loro qualità e relazioni e, in particolare, su una teoria degli interi e delle parti. La logica bolzaniana tratta un regno a sé stante, il regno delle proposizioni e delle rappresentazioni *in sé*, independente dal mondo fisico e dai nostre enunciati e pensieri. Questa è considerata una delle principali invenzioni della logica bolzaniana, e in tal modo Bolzano intende affrancare la logica dalla psicologia (cfr. Cantù [2003], Sebestik [2007]).

Nella sezione 4. consideremo la logica o teoria della scienza bolzaniana. Vedremo come Bolzano sviluppò un metodo per analizzare proposizioni e inferenze e per definire caratteristische semantiche, il cosiddetto metodo della variazione. Sulla base di questo metodo Bolzano ha definito, tra l'altro, una nozione di *deducibilità logica* che è essenzialmente la stessa di Tarski. Inoltre, vedremo come Bolzano svilluppò una nozione di spiegazione scientifica. Nonostante Bolzano non sia mai riuscito a fornire di questa nozione una definizione appropriata e soddisfacente, i suoi contributi in questo ambito hanno ispirato e continuano ad influenzare il dibattito sul cosidetto *grounding* nella metafisica contemporanea. Una questione aperta nell'interpretazione di Bolzano riguarda il problema fondamentale di comprendere se la spiegazione scientifica così come Bolzano la intendeva può essere definita sulla base del metodo della variazione (e dunque se sia, nella teoria di Bolzano, un tipo particolare di *deducibilità*).

Nella sezione 5. ci occuperemo del suo lavoro matematico, ed in particolare del modo in cui le sue opere filosofiche hanno influenzato quelle matematiche. Vedremo come Bolzano sviluppò una teoria dei numeri che si fonda sulla teoria degli interi e delle parti. Verranno inoltre discusse le opinioni di Bolzano sull'infinito. A Bolzano viene generalmente riconosciuto il merito d'aver anticipato la teoria del transfinito di Cantor, però, come vedremo, le opinioni di Bolzano sull'infinito sono sostanzialmente diverse da quelle di Cantor.

Per concludere, nella sezione 6., discuterò brevemente l'influenza di Bolzano e aggiungerò alcune brevi note su quegli aspetti del pensiero di Bolzano che qui, per ragioni di spazio, non avrò modo di trattare estesamente. Il profilo si concluderà con una panoramica degli scritti di Bolzano e di alcuni importanti testi di letteratura secondaria.

2. Vita e vita accademica

Bolzano ebbe, come dice Dagfinn Føllesdal, uno strano destino [2004]. Ai suoi tempi fu uno dei pensatori più importanti. Durante la sua vita pubblicò opere di matematica, teologia, filosofia e politica. Fu professore di scienza della religione all'università di Praga. Come professore di scienza della religione tenne per 14 anni (1805 - 1819) ogni domenica e ogni festività un discorso edificante (*Erbauungsrede*) a tutti gli studenti, allo scopo (che gli era stato affidato) di formare gli studenti sia come buoni cristiani che come onesti cittadini (Fossati [2014]). Come sostiene Lorenzo Fossati, non è eccessivo affermare che in quegli anni non vi fu in Boemia una figura più influente ed autorevole [2014].
Ma Bolzano venne presto dimenticato. Così completamente dimenticato, scrive Føllesdal, che per un lungo periodo non venne menzionato neppure nelle grandi opere di riferimento come l'*Encyclopedia Britannica* [2004]. Tale oblio fu il risultato di una sfortunata combinazione di circostanze, che comportò tra l'altro anche un divieto di pubblicazione.
Cominciamo all'inizio. Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano nacque a Praga, il 5 ottobre 1781, quarto figlio di due genitori cattolici devoti. La sua famiglia esercitò una grande influenza sul suo pensiero maturo. Suo padre, Bernard Bolzano Pompeo, era un mercante d'arte italiano, nato a Nesso, sul lago di Como, ma trasferitosi in Boemia fin dall'infanzia. Era un uomo modesto e mostrò sempre un grande interesse verso il prossimo. Ad esempio, fu tra i padri fondatori di un orfanotrofio a Praga (O'Connor e Robertson [2005]). La madre di Bolzano, Maria Cecelia Maurer, discendeva da una famiglia tedesca di commercianti. Dei dodici figli che essi ebbero, solo due raggiunsero l'età adulta. Anche Bolzano ebbe una salute assai precaria e soffrì di problemi respiratori per tutta la vita (O'Connor e Robertson [2005]).
Bolzano studiò teologia all'Università di Praga, dove ottenne anche una laurea in matematica, filosofia e storia generale, nonché un dottorato in filosofia (Fossati [2014]). Dopo aver ottenuto il dottorato, Bolzano si candidò per le cattedre sia di matematica che di scienza della religione. Risultò primo in entrambe le graduatorie, ma l'università preferì offrirgli la cattedra di scienza della religione (O'Connor e Robertson [2005]). Tale cattedra era stata istituita dall'imperatore austraico Francesco I, al fine di rafforzare la presa della Chiesa Cattolica Romana e contrastare così la minaccia sia dell'Illuminismo che del nazionalismo ceco nei confronti dell'Impero. Bolzano si rivelò l'uomo sbagliato per questo lavoro, poiché parteggiava per tutte quelle idee che Francesco I temeva: da libero pensatore quale era, credeva nella giustizia sociale,

nel pacifismo, nell'uguaglianza e si erse a difesa dei diritti dei boemi che non parlavano tedesco (O'Connor e Robertson [2005]).
Per queste ragioni, Bolzano divenne un osservato speciale da parte dei governanti dell'Impero. Egli tenne lezioni di religione e filosofia morale con forti sfumature pacifiste e socialiste. Usò il pulpito per proclamare, davanti a centinaia di studenti, una sorta di socialismo utopistico. Nei suoi sermoni cercò di dimostrare l'uguaglianza fondamentale di tutti gli esseri umani, attaccò la proprietà privata ottenuta senza lavoro, ed esortò i suoi ascoltatori a sacrificare ogni cosa nella loro lotta per i diritti umani (Bar-Hillel [1967]). Il suo atteggiamento gli procurò antipatie, ma anche simpatie, da parte dei membri della Chiesa cattolica. Bolzano credeva fermamente nei precetti morali cristiani, ma non altrettanto nelle sovrastrutture storiche e dogmatiche che il cattolicesimo professava. Agli occhi di Bolzano, la fede in una dottrina era giustificata solo nella misura in cui essa consentiva lo sviluppo di una buona morale (O'Connor e Robertson [2005]).
Nel 1813 pubblicò una selezione dei suoi discorsi edificanti e negli anni seguenti pubblicò varie opere politiche, tra cui una sulla dominazione dei boemi di lingua ceca da parte dei boemi di lingua tedesca. Per queste ragioni, egli venne accusato presso la corte di Vienna nel 1816. Ciò non sembrò avere contraccolpi sulla sua carriera e nell'anno accademico 1818-19 divenne decano della facoltà di filosofia (O'Connor e Robertson [2005]). Tuttavia, nel dicembre del 1819 venne sospeso dal suo incarico, per via delle pressioni esercitate dal governo austriaco. Oltre ad essere sospeso dall'insegnamento, venne anche messo agli arresti domiciliari, la sua posta venne censurata, e gli fu imposto il divieto di pubblicazione. Tra il 1821 e il 1825 fu processato dalla Chiesa, e nonostante la strenua difesa dei suoi punti di vista, gli venne intimato di ritrattare le sue eresie. Si rifiutò di farlo e dovette pertanto rinunciare alla cattedra (O'Connor e Robertson [2005]).
Tale allontanamento si rivelò in realtà una benedizione sotto mentite spoglie, poiché gli permise di scrivere molte opere importanti, tra cui la *Dottrina della Scienza* (*Wissenschaftslehre*; 1837) e *I paradossi dell'infinito* (*Paradoxien des Unendlichen*; 1851). Dal 1823 trascorse il periodo estivo nei pressi del villaggio di Tchobuz, nella Boemia meridionale, nella tenuta dei suoi amici Josef e Anna Hoffman; mentre trascorse i periodi invernali a Praga con il fratello Johann. Tra il 1830 e il 1841 visse tutto l'anno con gli Hoffmans, dedicando molto tempo allo studio (O'Connor e Robertson [2005]). Bolzano continuò a scrivere e a rivestire un ruolo importante nella vita intellettuale del suo Paese. A causa della censura del governo, alcuni dei suoi libri furono pubblicati fuori

dall'Impero austriaco. Dopo qualche tempo ottenne una revoca parziale del divieto di pubblicazione, con la limitazione di tale divieto alle sole opere di natura religiosa o politica (O'Connor e Robertson [2005]).
Quando Anna Hoffman si ammalò, nel 1841, Bolzano e gli Hoffmans si trasferirono a Praga dove vissero tutti con Johann Bolzano. Anna morì nel 1842. A Praga Bolzano divenne di nuovo un membro attivo della Royal Society Boemia delle Scienze e ne fu nominato presidente nel 1842-1843. Aveva sofferto di problemi respiratori per la maggior parte della sua vita e questi divennero più gravi con l'aumentare dell'età. Nell'inverno del 1848 contrasse un raffreddore che, dato il cattivo stato dei suoi polmoni, lo condusse alla morte (O'Connor e Robertson [2005]).
Al momento della sua morte una gran parte delle sue opere era rimasta inedita e solo piccoli estratti vennero pubblicati negli anni successivi. Solo nel 1969 fu dato avvio alla pubblicazione dell'edizione completa delle sue opere (pubblicato da Fromman-Holzboog, Stoccarda).
La personalità ammirevole di Bolzano traspare nei suoi scritti, anche in quelli logici. Le sue opere sono esempi mirabili di onestà accademica: egli non manca mai di offrire alle tesi dei suoi avversari (per lo più kantiani) la più attenta e rispettosa considerazione, e dove può egli ne riconosce meriti e crediti. L'obiettivo principale che Bolzano si propose di perseguire attraverso le sue opere fu quello di liberare l'umanità dal male causato dall'ignoranza.

3. METAFISICA

La teoria di Bolzano dà l'impressione di un grande edificio, nel senso che tutti gli aspetti della sua teoria sembrano connessi. Almeno in parte ciò dipende dal fatto che nella sua precoce vita accademica Bolzano stava lavorando in matematica e insegnando filosofia della religione, e constatò che entrambe queste discipline presentavano notevoli carenze per quanto riguardava i loro fondamenti logici (cfr. Sebestik [2007]). Così, Bolzano decise di sviluppare una nuova logica, che doveva costituire sia una cornice metodologica che una fondazione per tutte le scienze.
Bolzano non ha mai scritto alcun libro unicamente dedicato alla metafisica, ma si trovano dettagliate discussioni di problemi metafisici distribuiti tra le sue varie opere. In questa sezione presenterò le sue idee metafisiche che sono importanti per capire la sua logica e le sue idee generali sulla scienza. Presenterò principalmente le sue idee metafisiche così come sono presentate nella *Dottrina della Scienze* (*Wissenschaftslehre*; da ora in poi WL). La nuova logica presentata nella WL, opera in quattro volumi pubblicata nel 1837, rappresenta

il culmine di un lavoro minuzioso sulla metodologia scientifica, lavoro a cui Bolzano si dedicò intensamente fin dalla pubblicazione del suo primo lavoro scientifico del 1804, *Riflessioni su alcuni elementi di geometria elementare* (*Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, da ora in poi BE). Ove pertinente farò riferimento anche ad altre opere precedenti e successive.

3.1 L'universo di Bolzano[1]

Una delle principali invenzioni della WL - nella sezione 4. vedremo perché è così importante - è la divisione del regno ontologico in due modi di essere. Da un lato troviamo gli oggetti che sono nel mondo fisico. Nella concezione di Bolzano, questi oggetti *esistono* (*existieren*) o hanno *attualità* (*Wirklichkeit*). Esempi tipici di tali oggetti sono alberi, cavalli, profumi e colori, ma anche pensieri, desideri e enunciati linguistici. Questi oggetti, Bolzano sostiene, sono *effettivi* (*wirklich*). Ciò significa che possono partecipare nella catena di cause ed effetti. Dall'altro lato troviamo gli oggetti che, nella concezione di Bolzano, solemente *ci sono* (*es gibt*) o sono *inattuali* (*nicht wirklich*). In contrasto con gli oggetti del mondo fisico, questi oggetti *non* esistono e *non* sono effettivi. Esempi di questi oggetti sono numeri, figure geometriche e valori morali. Possiamo chiamare questi oggetti, seguendo Casari, *lektologici*, poiché hanno il carattere dei $\lambda\epsilon\kappa\tau\acute{\alpha}$ stoici.[2]
Tutti gli oggetti nell'universo di Bolzano, cioè sia gli oggetti lektologici che gli oggetti fisici, si dividono in due categorie: ogni oggetto è o una *qualità* (*Beschaffenheit* o *Eigenschaft*)[3] o un *oggetto* che non è una qualità. Seguendo Casari [1985] e Betti [2001], chiameremo *puri* questi ultimi. Le qualità sono oggetti che sono *posseduti da* o che *appartengono a* (*zukommen an*) un altro oggetto; gli oggetti puri sono quegli oggetti che *non* sono posseduti da e non

[1] Le titolo di questo sezione è stesso di Betti [2012], da cui ho ampiamente attinto nella stesura della presente sezione.

[2] Casari [1987, p.56]. La stessa terminologia è adotto da Betti [2001, 2012] e Cantù [2003].

[3] Userò *qualità* come traduzione per *Beschaffenheit* e *proprietà* per *Eigenschaft*. Tra questi due nozioni, quello di qualità è fondamentale. Si può dire, in termini moderni, che una proprietà è una relazione con arietà 1, mentre una qualità comprende relazioni con qualsiasi arietà (WL §80; cfr. Sebestik [2007]). Inoltre, la nozione di qualità comprende anche le *determinazioni* (*Bestimmungen*) spaziali e temporali di oggetti. Le determinazioni, secondo Bolzano, non sono proprietà, ma invece, nelle parole di Betti [2006], indicazioni semantiche per dove nel tempo e nello spazio ci troviamo gli oggetti (cfr. Betti [2001], Casari [1985]).

appartengono a un altro oggetto (Betti [2012]). Gli oggetti puri che *esistono* sono chiamati da Bolzano *sostanze* (*Substanzen*); le loro qualità sono chiamate da Bolzano *aderenze* (*Adhärenzen*; cfr. WL §§142, 272). Bolzano non accetta oggetti senza qualità; se Bolzano accetti qualità che non appartengono a nessun oggeto è un punto su cui gli studiosi non sono concordi (cfr. Betti [2012]). Nella concezione di Bolzano, le qualità ereditano lo status ontologico dell'oggetto a cui appartengono: le qualità degli oggetti che ci sono, ci sono a loro volta; le qualità degli oggetti che esistono, esistono a loro volta (WL §§80, 142). Per esempio, un triangolo è un oggetto puro e avente tre lati è una delle sue qualità; tu, lettore o lettrice, sei una sostanza e il tuo leggere questo profilo di Bolzano è una delle tue aderenze.

Potrebbe essere utile considerare in che modo *avere attualità* (o *essere esistente*) è diverso da *essere una sostanza* (cfr. WL §142). Visto che nella teoria bolzaniana una sostanza è qualcosa di esistente che *non* è una qualità, essere una sostanza non può essere una qualità, o come Bolzano dichiara: non può essere come la 'sostanzialità' (*Substanzialität*; WL §142). L'attualità, invece, è una qualità (per essere precisi: é una qualità *di primo ordine* degli oggetti, cfr. qui di seguito). Quindi si può dire che ogni sostanza ha attualità. Tuttavia, non è vero il contrario: non ogni oggetto che ha attualità è una sostanza. Ciò segue dal fatto che secondo Bolzano anche le qualità di qualcosa che esiste sono esistenti: un oggetto che ha attualità può infatti essere un'aderenza. Inoltre, va notato che Bolzano adotta talvolta una concezione più ristretta di sostanza, secondo la quale solo gli oggetti puri *semplici ed eterni* sono sostanze, come ad esempio le anime e Dio (cfr. Betti [2012] e la letteratura ivi citata). Secondo questa concezione ristretta di sostanza, ci sarebbero anche oggetti puri che hanno attualità e che non sono sostanze.

Avere attualità ed *essere inattuali* (l'una la negazione dell'altra), sono qualità di primo ordine degli oggetti nella teoria di Bolzano. Come abbiamo visto prima, gli oggetti inattuali per Bolzano semplicemente *ci sono*. *Esserci* però, è una qualità *di secondo ordine* degli oggetti. Come funziona? Per capire questo, dobbiamo introdurre una delle nozioni centrali nella metafisica di Bolzano: la nozione di *rappresentazione in sé* (*Vorstellung an sich*).

Per ogni oggetto nell'universo di Bolzano c'è una rappresentazione in sé, tale che questa rappresentazione in sé è la rappresentazione in sé *di* questo oggetto; o, per dirla in modo diverso, tale che questo oggetto *cade sotto* questa rappresentazione in sé. Le rappresentazioni in sé sono oggetti lektologici, e Bolzano le chiama rappresentazioni *in sé* per sottolineare la loro indipendenza dal pensiero umano e dalle asserzioni linguistiche. Per lo più, tuttavia, Bolzano omette l'aggiunta "*in sé*" e le chiama rappresentazioni tout court; seguirò Bolzano in questa scelta di terminologia.

Le rappresentazioni secondo Bolzano hanno un *contenuto* (*Inhalt*) e un'*estensione* (*Umfang*). Rispetto al contenuto, Bolzano distingue tra rappresentazioni *semplici* e *complesse* (WL §56). Una rappresentazione semplice non ha altre rappresentazioni come parti, mentra una rappresentazione complessa sì.[4] Due rappresentazioni possono avere lo stesso contenuto senza essere la stessa rappresentazione (WL §96). Gli esempi preferiti di Bolzano sono [un figlio erudito di un padre non erudito] che ha lo stesso contenuto ma non è la stessa rappresentazione di [un figlio non erudito di un padre erudito] e [3^5] che ha lo stesso contenuto ma non è la stessa rappresentazione di [5^3].[5] Rispetto all'estensione, Bolzano distingue tra rappresentazioni *oggettuali* (*gegenständlich*) e *anoggettuali* (*gegenstandloss*) (WL §66). Le rappresentazioni oggettuali hanno oggetti che cadono sotto di loro (esattamente un oggetto nel caso di rappresentazioni *singolari*, o più di uno nel caso di quelle *generali*); le rappresentazioni anoggettuali invece no.[6] Considereremo oggettualità e anoggettualità nella sezione 5.1; ora invece volgiamo cercare di capire perché *esserci* è una qualità *di secondo ordine* degli oggetti.

Quando diciamo che ci sono tali e tali oggetti, il nostro enunciato afferma di fatto, secondo Bolzano, che *la rappresentazione* di un oggetto che è tale e tale *è oggettuale* (WL §137). Quindi, la forma *linguistica* del nostro enunciato *sembra suggerire* che stiamo predicando qualcosa sugli *oggetti* che sono tali e tali, ma *in realtà*, Bolzano ritiene, stiamo affermando qualcosa sulla *rappresentazione* sotto la quale questi oggetti cadono (cioè stiamo dicendo che è oggettuale). Per esempio, quando dico "ci sono triangoli", in realtà affermo

[4] Poiché Bolzano definisce il contenuto come la *somma* (*Summe*) delle parti di una rappresentazione, una rappresentazione semplice non ha in senso stretto un contenuto (per il concetto di somma bolzaniana si veda la sezione 3.3). Tipicamente, nell'interpretazione bolzaniana, il contenuto di una rappresentazione è considerato l'*insieme* delle sue parti (incluse le parti improprie; cfr. Morscher [2007]).

[5] È comune fra gli studiosi di Bolzano usare le parentesi quadre per indicare le rappresentazioni in sé. Secondo quest'uso, per esempio, l'espressione [Kant] indica la rappresentazione sotto cui cade Kant. In questo profilo seguirò l'uso comune.

[6] Come nel caso dei contenuti (cfr. nota 4), Bolzano definisce l'estensione come la *molteplicità* (*Menge*) degli oggetti a cui questa rappresentazione si referisce, o in altre parole, delle oggetti che cadono sotto questa rappresentazione, una rappresentazione singolare non ha in senso stretto un'estensione (WL §66; per il concetto di molteplicità si veda la sezione 3.3). Tipicamente, nell'interpretazione bolzaniana, il contenuto di una rappresentazione è considerato l'*insieme* delle sue parti (incluse le parti improprie) (cfr. Morscher [2007]).

che la rappresentazione di un triangolo, cioè [triangolo], è oggettuale. Così, l'espressione *ci sono* ha una funziona analoga al quantificatore esistenziale della logica moderna: "Ci sono A" potrebbe essere tradotto nella notazione moderna con "$\exists x A(x)$" (Cantù [2003], cfr. Schnieder [2007]).

Un problema aperto nell'interpretazione bolzaniana è se l'universo di Bolzano contenga oggetti *meramente possibili*, cioè oggetti che non sono attuali, ma possono essere attuali. Un esempio di un oggetto meramente possibile sarebbe una montagna d'oro meramente possibile. Schnieder [2007] sostiene che Bolzano accettasse oggetti meramente possibili. Altri, invece, negano esplicitamente che Bolzano accettasse oggetti meramente possibili (ad esempio Beyer [2001], Betti [2001]). È importante notare che Bolzano non ha bisogno di oggetti meramente possibili per spiegare le nostre attività mondane e scientifiche: per esempio, c'è nella teoria bolzaniana la rappresentazione (anoggettuale) [montagna d'oro] che permette di pensare e parlare di montagne d'oro, che è costitutiva delle verità riguardanti le montagne d'oro (cfr. WL §67), e che può diventare oggettuale se per esempio Dio decide di arricchire la terra con una montagna d'oro. Secondo Betti [2001] non è difficile mostrare che per Bolzano non ci sono oggetti meramente possibili, ma solo rappresentazioni anoggettuali.

È fuor di dubbio invece che per Bolzano *non* ci siano oggetti *lektologici* meramente possibili.[7] Egli sostiene che le rappresentazioni di oggetti lektologici, cioè rappresentazioni tali che, se oggettuali, i loro oggetti sono *non-esistenti* (in terminologia moderna: rappresentazioni di oggetti *astratti*; in terminologia bolzaniana: rappresentazioni che non *esigono attualità* (*keine Wirklichkeit fordern*)), sono oggettuali *sse* sono non contraddittorie (WL §§68, 352, PU §14). Contraddittorie, secondo Bolzano, sono le rappresentazioni che attribuiscono due qualità che non possono mai essere trovate insieme in un oggetto (cfr. Cantù [2003]).[8] Come vedremo nella sezione 5.1, ciò risulta particolarmente importante ai fini della sua fondazione della matematica.

Inoltre, non c'è alcun dubbio che ci siano nell'universo di Bolzano oggetti *necessari*. Le idee di Bolzano circa la necessità però, non sono facili da ca-

[7] Almeno, da WL in poi. Nel BY, Bolzano ha sostenuto che la matematica è una scienza *meramente ipotetica*, vale a dire, una scienza che si occupa delle *condizioni* di esistenza degli oggetti (BY §8; cfr. Sebestik [2011]).

[8] Due qualità *non possono mai essere trovate insieme in un oggetto sse* si può provare, a partire da *verità puramente concettuali* (si veda qui di sotto), che un oggetto con queste due qualità non può esserci. Nei termini della teoria proposizionale di Bolzano (si veda sezione 3.2): una rappresentazione contraddittoria ha la forma [A, che ha B e P], dove [B ha M] e [P ha non-M] sono vere (WL §70).

pire e si è sostenuto che la concezione di necessità in Bolzano non dovrebbe essere confusa con la concezione di necessita tipica della filosofia contemporanea (Rusnock [2012], Textor [2013]). Occorre innanzitutto distinguere tra *concetti* e *intuizioni*. Bolzano assume la distinzione kantiana tra questi due tipi di rappresentazioni, ma respinge le definizioni che Kant ne dà (Sebestik [2007]). Bolzano definisce le intuizioni (*in sé*), utilizzando solo concetti della sua logica, come *rappresentazioni semplici singolari*, semplici per quanto riguarda i contenuti, singolari per quanto riguarda l'estensione (WL §72). Le controparti delle intuizioni in sé, se ci sono, sono intuizioni *soggettive*. Tali intuizioni soggettive sono per Bolzano eventi mentali, ossia i cambiamenti in noi stessi che sperimentiamo quando percepiamo un oggetto esterno (WL §72). I concetti sono rappresentazioni che non sono intuizioni e non contengono intuizioni come loro parti (WL §73). Occorre sottolineare che gli oggetti esistenti non possono essere rappresentati unicamente da concetti, ma sempre da intuizioni o rappresentazioni miste, cioè rappresentazioni che sono composte da intuizioni e concetti (WL §74). Ci sono però eccezioni a questa regola: ad esempio, Dio e i Suoi poteri e la totalità dell'universo sono rappresentate unicamente da concetti, sostiene Bolzano (WL §74). Per queste eccezioni, le proposizioni che esprimono che questi oggetti hanno attualità sono *verità puramente concettuali* (WL §182). Per esempio [Onniscienza ha attualità] è secondo Bolzano una verità puramente concettuale. Si noti che le eccezioni che Bolzano suggerisce sono tutti oggetti che sono rappresentati da rappresentazioni (concetti) *singolari*, cioè essi sono rappresentati *unicamente* dalle loro rappresentazioni (concetti). Infatti, Bolzano sostiene, un oggetto esistente x è necessario *sse* c'è una verità puramente concettuale [A ha attualità] in cui [A] rappresenta solo x (WL §182). Si noti inoltre che gli *oggetti* necessari nella teoria di Bolzano sono strettamente correlati alle *verità* necessarie (cfr. Textor [2013]).

3.2 Proposizioni

Tra gli oggetti lektologici troviamo gli oggetti primari della logica di Bolzano: le *proposizioni in sé* (*Sätze an sich*). Le proposizioni in sé sono i portatori della verità e falsità nella logica bolzaniana e assomigliano ai *pensieri* (*Gedanken*) di Frege.[9] Le proposizioni *in sé* possono apparire nella mente degli esseri pensanti come proposizioni *soggettive*. In questo caso, nei termini di Bolzano, la mente dell'essere pensante *afferra* (*erfasst*) la proposizione in sé;

[9] Per un confronto fra le concezioni di Bolzano e Frege si veda Künne [1997].

questo atto di afferrare è un fenomeno mentale che Bolzano chiama *pensiero* (*Gedanke*) e che a suo parere è un'aderenza della mente di questo essere (WL §291, cfr. Morscher [2007]). Nel caso in cui non solo la proposizione viene afferrata, ma anche la verità della proposizione è affermata, Bolzano chiama il fenomeno mentale *giudizio* (*Urteil*) (cfr. Morscher [2007]). Molto importante, nella concezione di Bolzano le proposizioni in sé sono *indipendenti* dai fenomeni mentali: una proposizione in sé c'é anche se la corrispondente proposizione soggettiva non è mai stata pensata o enunciata da qualcuno (WL §25). Analogamente a quanto visto prima per quanto riguarda le rappresentazioni, anche le proposizioni sono dette *in sé* per sottolineare la loro indipendenza dal pensiero umano e delle asserzioni linguistiche. Anche in questo caso per lo più Bolzano omette l'aggiunta *in sé* e le chiama proposizioni tout court; di nuovo seguirò Bolzano in questa scelta di terminologia. La dicotomia tra le proposizioni e rappresentazioni *in sé* e le proposizioni e rappresentazioni *soggettive*, ed in particolare l'independeza delle prime dalle seconde, è un aspetto cruciale della logica bolzaniana, che, come dice Cantù, dovrebbe essere intesa come un tentativo di affrancare la logica dalla psicologia e di individuare criteri oggettivi per stabilire la verità delle proposizioni ([2003]; cfr. Sebestik [2007]).

Le proposizioni nella concezione di Bolzano sono entità strutturate, composte di parti in un modo specifico. Le parti di una proposizione che non sono a loro volta proposizioni sono *rappresentazioni*. Come le proposizioni, anche le rappresentazioni *in sé* sono oggetti lektologici che possono essere afferrate dalle mente degli esseri pensanti come rappresentazioni *soggettive*; anche questo fenomeno mentale è un *pensiero* nella concezione di Bolzano (WL §272).

Prevalentemente, Bolzano è considerato un *platonista* per quanto riguarda le proposizioni e le rappresentazioni (cfr. Betti [2012]). Tuttavia, un altro punto di vista è possibile: per esempio Cantù [2003, 2006] osserva che Bolzano *non* parla dell'indipendenza di proposizioni e rappresentazioni dal linguaggio e dal pensiero *in generale*, ossia di indipendenza da un *soggetto pensante* o da un *parlante concreto*. A tal proposito, Cantù suggerisce che le idee di Bolzano sull'indipendenza delle proposizioni e delle rappresentazioni non siano da interpretarsi come platonismo logico, ma piuttosto come *oggettivismo semantico*. Ciò significa che le proposizioni e rappresentazioni in sé *non* ci sono indipendentemente dal pensiero o dal linguaggio; piuttosto ci sono indipendemente dal pensiero e dal linguaggio *di un soggetto*.

Si potrebbe criticare Bolzano per non aver chiarito ulteriormente lo statuto ontologico di queste proposizioni e rappresentazioni. Tuttavia, come sostenuto da Morscher [2007], al fine di rendere giustizia a Bolzano dovremmo tenere a mente che nessun altro fautore di un tale Mondo 3 - tra cui Husserl, Popper e Frege - è mai riuscito a fare meglio di Bolzano, nè ha mai saputo dire nulla di più chiaro in proposito rispetto a quanto si può gia trovare nelle opere di Bolzano.

Nella concezione di Bolzano la forma linguistica delle frasi non necessariamente corrisponde alla forma delle proposizioni che esse esprimono. Per esempio, all'enunciato "Socrate è un uomo" corrisponde la proposizione [Socrate ha umanità].[10] Secondo Bolzano, quasi tutte, se non tutte, le proposizioni, e sicuramente tutte le proposizioni vere, sono costituite da tre parti: (1) una rappresentazione soggetto, (2) la rappresentazione copula, e (3) una rappresentazione predicato (WL §§126, 127). La rappresentazione soggetto (1) è anche detta da Bolzano *substrato* (*Unterlage*) ed è la rappresentazione di quegli oggetti di cui si predica qualcosa nella proposizione. La rappresentazione predicato (3) è anche detta da Bolzano *parte informativa* (*Aussageteil*) ed è la rappresentazione che attribuisce qualcosa a questi oggetti. Le rappresentazioni soggetto e predicato sono collegate mediante la rappresentazione copula (2), che in tutte le proposizioni è [ha] (cfr. WL §§80, 127).[11] Perciò, ogni proposizione secondo Bolzano ha la forma [A ha *b*], in cui [A] è la rappresentazione soggetto e [*b*] è la rappresentazione predicato ([A] e [*b*] possono a loro volta contenere altre rappresentazioni come parti). Nella sezione 4.1 vedremo come Bolzano analizza ad esempio frasi che contengono negazioni, congiunzioni o disgiunzioni al fine di parafrasarle in modo tale che la loro forma corrisponda alla loro forma proposizionale. Bolzano riesce a mostrare che una vasta gamma di frasi possono essere parafrasate in questo modo. Si noti tuttavia che spesso Bolzano utilizza frasi (a titolo di esempio per illustrare svariate affermazioni) che *non* sono espresse in un modo corrispondente alla forma proposizionale e non è sempre chiaro come questo potrebbe essere fatto. Per maggior chiarezza, in questo profilo formulerò sempre gli esempi nel modo più analogo possibile alla forma proposizionale (sarò pertanto più romana del papa).

[10] Come nel caso delle rappresentazioni, anche per indicare le proposizioni in sé è comune fra gli studiosi di Bolzano usare le parentesi quadre. Secondo quest'uso, per esempio, l'espressione [Kant è un filosofo tedesco] indica la proposizione che afferma che Kant è un filosofo tedesco. Seguirò questo uso comune in questo profilo e lo userò anche per indicare le *forme* proposizionali come [X è un filosofo tedesco] o [A ha *b*].

[11] In *Contrubuti a un'esposizione più fondata della matematica* (*Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, da ora in poi BD) Bolzano ha riconosciuto diversi tipi di copule (cfr. Roski [2014]).

L'opinione di Bolzano che ogni proposizione abbia la forma [A ha *b*] dovrebbe essere intesa alla luce delle sue opinioni sulle condizioni di verità per le proposizioni. Bolzano formula le seguenti condizioni di verità per le proposizioni (Casari [1987]; WL §§80, 130, 131): [A ha *b*] è vera *sse*

(i) [A] è oggettuale;

(ii) [*b*] è una rappresentazione di una qualità (e è oggettuale);

(iii) almeno una delle qualità a cui si riferisce [*b*] appartiene all'oggetto (oggetti) a cui si riferisce [A].

Bolzano prende la rappresentazione soggetto [A] come facente riferimento a tutti gli oggetti che cadono sotto di essa (WL §130). Per esempio [Un filosofo ha saggezza] è vera solo se *tutti* i filosofi sono saggi. Ciò non vale per la rappresentazione predicato [*b*]: per esempio [Socrate e Platone hanno saggezza] può essere vera anche se Socrate e Platone non hanno tutta la saggezza che esiste e anche se inoltre la saggezza di Socrate è diversa dalla saggezza di Platone (WL §131). Visto che la rappresentazione soggetto si riferisce a tutti gli oggetti che cadono sotto di essa, nella teoria bolzaniana non è necessario preporre un quantificatore universale a una proposizione universale. Per esempio, entrambe le frasi "Un uomo è mortale" e "Tutti gli uomini sono mortali" esprimono la stessa proposizione (cfr. Sebestik [2007]).

Da quanto sopra esposto, dovrebbe essere chiaro che nella teoria bolzaniana del riferimento ci sono tre livelli: (1) il livello linguistico, (2) il livello di proposizioni e rappresentazioni e (3) il livello degli oggetti della rappresentazione. Un'espressione linguistica (cioè un enunciato o pensiero) può esprimere proposizioni o rappresentazioni, e una proposizione o rappresentazione si può riferire a oggetti. Alcune espressioni, come per esempio "Abracadabra", non esprimono rappresentazioni (WL §70); alcune rappresentazioni, come per esempio [niente], non si riferiscono a oggetti (WL §67). Importante è che anche le proposizioni e le rappresentazioni potrebbero essere oggetto di una rappresentazione; le rappresentazioni che si riferiscono a proposizioni o rappresentazioni, Bolzano le chiama rappresentazioni *simboliche* (WL §90). Per esempio [verità], sotto cui cadono tutte le proposizioni vere, e [[Kant]], sotto cui cade la rappresentazione sotto cui cade Kant, sono rappresentazioni simboliche. Vedremo nella sezione 4.1 che le rappresentazioni simboliche giocano un ruolo cruciale nella logica bolzaniana.

Per spiegare come una stessa espressione linguistica possa avere significati diversi in differenti contesti, Bolzano sostiene che le rappresentazioni (e conseguentemente le proposizioni) a proposito di oggetti fisici hanno un indice nascosto di luogo e tempo (WL §§25, 79). Ad esempio "Socrate è vecchio" esprime che Socrate *al tempo* t è vecchio. Questo indice, appartenente alla rappresentazione soggettiva (nella terminologia di Bolzano: una *determinazione* dell'oggetto, si veda nota 3), fa sì che le proposizioni non cambino mai il loro valore di verità (cfr. WL §147). Allo stesso modo, ad esempio, "il re di Francia" esprime nella concezione di Bolzano la rappresentazione del re di Francia al tempo *t*. E quindi, anche le rappresentazioni non cambiano mai la loro estensione.

3.3 INTERI E PARTI

La teoria degli interi e delle parti serve da base sia per la logica che per la matematica bolzaniane. Tale teoria viene interpretata da alcuni come un'anticipazione della teoria degli insiemi (e.g. Berg [1992]), da altri come una mereologia (e.g. Betti [2012]), da altri ancora come né l'una né l'altra (e.g. Simons [1997]). In questa sezione non ci preoccuperemo di prendere posizione in merito a tale diatriba, ma ci limiteremo ad esaminare gli aspetti più importanti di tale teoria ai fini di una corretta comprensione della logica e della matematica in Bolzano.

Ciò che abbiamo visto nella sezione 3.1 a proposito delle rappresentazioni, vale anche per gli altri oggetti: secondo Bolzano, ci sono oggetti *semplici* e *complessi*. Un oggetto semplice non ha altri oggetti come sue parti, mentre un oggetto complesso sì. Una parte (*Theil*) per Bolzano è sempre una parte *propria* e ne consegue che un oggetto complesso ha sempre almeno due parti (WL §§82,83). Gli oggetti complessi sono anche detti da Bolzano *collezioni* (*Inbegriffe*) o *interi* (*Ganzen*; WL §82).

Nella teoria bolzaniana dunque, 'collezione' è un termine molto generico per gli oggetti complessi. Si noti pertanto che non possono esserci, per Bolzano, né collezioni vuote né collezioni costituite da un solo elemento. Inoltre, un oggetto non può essere contenuto più di una volta nella stessa collezione (GL §6).

Bolzano distingue tra due categorie principali di collezioni: (1) quelle per cui l'*ordine* delle parti, vale a dire la modalità di composizione, è rilevante, e (2) quelle per le quali non lo è. Un tipo particolare della prima categoria di collezioni (Bolzano non dà nome a queste categoria) sono le *serie* (*Reihen*). Una collezione è detta da Bolzano una serie quando, per ogni oggetto N in questa collezione, la collezione comprende anche un altro oggetto M tale che o N può essere determinato da M, o M può essere determinato da N, secondo una regola. Tale regola determina tutti gli elementi della collezione ed altro non è che la relazione sussistente fra gli oggetti della collezione (WL §85).

Le collezioni della seconda categoria sono dette da Bolzano *molteplicità* (*Mengen*), e un tipo particolare di molteplicità sono quelle che Bolzano chiama *somme* (*Summen*).[12] Le somme, per Bolzano, sono molteplicità in cui le parti delle loro parti (chiamiamole le *sotto-parti*) sono a loro volta parte della molteplicità (WL §84). Ciò significa che in una somma, si può illimitatamente sostituire una parte di essa con le sotto-parti di tale parte, e viceversa (WL §84, cfr. WL §305). Secondo Bolzano, questo è il concetto di somma a cui i matematici fanno riferimento con il segno '$+$' quando questo viene utilizzato per sommare delle quantità (WL §84). Inoltre, secondo Bolzano, la legge associativa dell'addizione, cioè la legge che dice che per ogni a, b, c, $(a + b) + c = a + (b + c)$, segue direttamente dal concetto di somma (WL §305). Un esempio di somma, per Bolzano, è la lunghezza di una linea: per quanto riguardo la lunghezza, possiamo considerare la linea come composta da altre linee più piccole (questo è quello che facciamo nel processo di misura della linea; WL §84).

Nelle molteplicità *tout court*, cioè nelle molteplicità che non sono somme, non è invece possibile sostituire illimitatamente le parti con le loro sotto-parti. In altre parole, tali molteplicità hanno *parti ultime*. In esse, nella teoria di Bolzano, possiamo sostituire una parte con le sue parti *finché* non si arriva a quegli oggetti che consideriamo le parti ultime in tale contesto. Ad esempio, in un mucchio di monete, se vogliamo mantenere il suo valore, possiamo sostituire, ad esempio, una parte composta da quattro monete con due parti composte di due monete ciascuna, ma non possiamo dividere le monete stesse in parti (WL §84; EG §119).

Le parti ultime di una molteplicità sono dette da Bolzano *unità* (*Einheiten*; WL §86, EG §119). Secondo Bolzano, dovremmo sempre specificare quale tipo o *specie* di oggetti sono le unità con cui abbiamo a che fare. Dunque le unità sono *unità di specie* A (*Einheiten von der Art* A). Un'unità di specie A

[12] Nella letteratura secondaria, a volte *Menge* viene tradotto come *insieme*, che è anche comunemente usato per tradurre *Menge* di Cantor. Tale traduzione potrebbe essere preferibile da un punto di vista della storia delle idee, perché mostra l'affinità tra questi due concetti. Tuttavia, poiché le *Mengen* di Bolzano e quelle di Cantor differiscono per alcune importanti proprietà e al fine di ricordare al lettore che la nozione di Bolzano è diversa da quella di Cantor, userò *molteplicità* per le *Mengen* di Bolzano.

è semplicemente un oggetto che cade sotto la rappresentazione di A, cioè [A] (WL §86). Ne segue che anche le molteplicità sono relative a questa specie di oggetti. Infatti, esse sono propriamente dette da Bolzano *molteplicità di specie* A (*Vielheiten von der Art* A) (WL §86). Si noti che *Vielheit* e *Menge* sono per Bolzano la stessa cosa: una *Vielheit* o *Menge* (molteplicità) di specie A è una collezione di oggetti che cadono sotto di [A] (WL §86, EG §119; cfr. Betti [2001]). Quando una molteplicità di specie A comprende tutti gli oggetti che cadono sotto di [A], questa collezione è detta da Bolzano la *totalità* (*Allheit*) di A (WL §86).
Le molteplicità di specie A sono *numeri di specie* A: una molteplicità composta da un'unità di specie A e un'altra unità di specie A (e niente di più) è, come scrive Bolzano, un *due di specie* A (WL §86; cfr. Betti [2001]). Vedremo nella sezione 5.1 come Bolzano utilizzi questi numeri di una certa specie per fondare il suo concetto di numero naturale.

4. La logica come teoria della scienza

La logica per come la intendiamo oggi, cioè logica formale, è solo una parte della logica bolzaniana. Infatti, *logica* e *teoria della scienza* sono per Bolzano la stessa cosa, e includono accanto alla logica formale anche epistemologia, didattica, linee guida per la presentazione di una scienza in un libro di testo e addirittura linee guida per publicare tali libri di testo. Come Bolzano scrive nella prima sezione della *Dottrina della Scienza*, "intendo la teoria della scienza come l'epitome di tutte quelle regole in base alle quali dobbiamo procedere nel compito di dividere tutto il territorio della verità in singole scienze e di presentare la stessa nei libri di testo, se vogliamo agire in modo appropriato". Bolzano credeva che un'appropriata metodologia scientifica avrebbe liberato l'umanità dal male causato dall'ignoranza (WL §1).
In questa sezione presenterò quegli aspetti della logica bolzaniana che sono considerati più influenti (cfr. Sebestik [2007]). Nella seconda sottosezione considereremo ciò che chiameremo il "metodo della variazione", che permette a Bolzano di svillupare un primo metodo di calcolo della probabilità, nonché una nozione semantica di conseguenza logica simile a quella di Tarski. Nella terza sottosezione considereremo le sue idee sulla spiegazione scientifica che sono alla base della discussione metafisica contemporanea del cosiddetto *grounding*. A tal fine, inizieremo col prendere in considerazione il modo in cui Bolzano parafrasa enunciati contenenti negazioni, congiunzioni e disgiunzioni secondo la sua idea secondo cui ogni proposizione ha la forma [A ha *b*] (cfr. la sezione 3.2).

4.1 Una logica proposizionale

Abbiamo visto nella sezione 3.1 che, secondo Bolzano, un enunciato

(1_e) "ci sono triangoli"

afferma che la rappresentazione [triangolo] è oggettuale. Dunque, tale enunciato si può esprimere in modo corrispondente alla forma proposizionale

(1_p) [[triangolo] ha oggettualità] (WL §137).

La rappresentazione soggetto di questa proposizione, cioè [[triangolo]], è una rappresentazione simbolica: sotto [[triangolo]] cade [triangolo], sotto cui a sua volta cadono tutti i triangoli. Allora, secondo le condizioni di verità bolzaniane (vedi sezione 3.2), (1_p) è vera perché la rappresentazione soggetto, cioè [[triangolo]], è oggettuale e l'oggettualità appartiene alla rappresentazione [triangolo]. In parole diverse: (1_p) è vera perché è vero di [triangolo] che è oggettuale.

Nello stesso modo, l'enunciato

(2_e) "alcuni triangoli sono perpendicolari"

verrebbe espresso, secondo Bolzano, in modo corrispondente alla forma proposizionale:

(2_p) [[triangolo, che ha perpendicolarità] ha oggettualità].

Quale proposizione dovrebbe corrispondere, secondo Bolzano, all'enunciato

(3_e) "non tutti i triangoli sono perpendicolari"?

Secondo Bolzano ci sono due opzioni (WL §189). La prima è di analizzare questo enunciato come una negazione del predicato. Avremmo allora

($3a_p$) [[triangolo, che ha perpendicolarità]] ha anoggettualità].

Questa proposizione afferma che non ci sono triangoli perpendicolari (e dunque è falsa). Si osservi che [anoggettualità] è la negazione della qualità di oggettualità. Infatti, per Bolzano, la negazione del predicato, cioè la negazione di una qualità, è l'affermazione della *mancanza di* questa qualità (che è anche una vera e propria qualità). Dunque, ($3a_p$) può essere analizzata come [[triangolo, che ha perpendicolarità]] ha mancanza-di-oggettualità] (WL §127; cfr. Betti [2012]). La seconda opzione è di analizzare quest'enunciato come una negazione della proposizione:

($3b_p$) [[triangolo ha perpendicolarità]] ha falsità].

La proposizione ($3b_p$) afferma che ci sono triangoli che non sono perpendicolari. Secondo Bolzano non c'è una parafrasi corretta. Entrambe possono essere corrette a seconda di ciò che si vuole esprimere.
Bolzano applica la stesso metodo, combinato con la sua teoria delle collezioni, all'analisi di enunciati che contengono congiunzioni e disgiunzioni. Per esempio

(4_e) "Caio ha coraggio o Caio ha forza"

sarebbe, secondo Bolzano, espressa in modo corrispondente alla forma proposizionale:

(4_p) [[Proposizione vera nella collezione composta da [Caio ha coraggio] e [Caio ha forza]] ha oggettualità] (WL §166).

Questa proposizione è vera se almeno una delle proposizioni [Caio ha coraggio] e [Caio ha forza] è vera, il che è esattamente ciò che s'intende con l'enunciato (4_e). Anche se Bolzano non lo dice esplicitamente, evidentemente l'enunciato

(5_e) "Caio ha coraggio e Caio ha forza"

esprime la proposizione

(5_p) [[Collezione di [Caio ha coraggio] e [Caio ha forza], tale che due di questi proposizioni sono vere] ha oggettualità] (cfr. WL §160, Betti [2012]).

In questo modo è possibile parafrasare una vasta gamma di enunciati. Occorre notare però che Bolzano non offre un metodo per decidere qual è la parafrasi corretta di un dato enunciato, ma si limita ad offrire alcuni esempi. Nella prossima sottosezione vedremo in che modo tutto questo può essere sfruttato al fine di individuare proprietà semantiche di proposizioni e inferenze.

4.2 Il metodo della variazione

Il soggetto della logica formale, così com'è intesa da Bolzano, *non* sono le proposizioni, le rappresentazioni o le inferenze *singolari*, ma le loro *specie* (*Gattungen*) o *forme* (WL §12). Con ciò egli intende l'insieme di quelle proposizioni, rappresentazioni o inferenze che hanno certe parti in comune, vale a dire quelle parti che sono considerate rilevanti (WL §§12, 81). Certe forme hanno proprietà semantiche che le caratterizzano, e che determinano la loro utilità nella pratica scientifica. Al fine di scoprire di quali proprietà le proposizioni, rappresentazioni e inferenze possono godere, e per dare a queste proprietà una definizione rigorosa, Bolzano ha sviluppato il metodo della variazione.

Potrebbe essere utile considerare un esempio per capire come funziona tale metodo. Nell'esempio seguente considereremo solo una rappresentaziona variabile, ma possiamo anche variarne più di una. Consideriamo la proposizione

(1) [L'uomo Caio ha mortalità].

Supponiamo di voler sapere qualcosa circa le altre proposizioni della forma

(*) [L'uomo X ha mortalità].

A questo scopo, consideriamo [Caio] irrelevante e sustituiamola con altre rappresentazioni. Così, otteniamo per esempio

(2) [L'uomo Sempronio ha mortalità],

(3) [L'uomo Tito ha mortalità],

(4) [L'uomo triangolo ha mortalità] (WL §147).

La *forma proposizionale* (*), dunque, non è una proposizione, ma invece una collezione di proposizioni, ciascuna delle quali ha una rappresentazione diversa al posto di X. Chiamiamo (2)-(4) i [Caio]-*varianti* di (1). Considerare i [Caio]-varianti ci permette di scoprire le proprietà semantiche della forma proposizionale (*). Secondo Bolzano, per scoprire queste proprietà semantiche dobbiamo considerare solo le varianti con rappresentazioni soggetto *oggettuali*, dunque la proposizione (4) è considerata irrilevante. Bolzano non lo dice esplicitamente, ma intendeva dire che dobbiamo sostituire le rappresentazioni con altre dello stesso tipo semantico (cfr. Rusnock [2000]).

In questo esempio, si osserva che ogni [Caio]-variante (rilevante) è vera. Una forma proposizionale di questo tipo, cioè una forma proposizionale tale che ogni sostituzione rilevante produce una proposizione vera, è detta da Bolzano *assolutamente valida* (*allgemeingültig*) rispetto alla rappresentazione considerata come variabile (WL §147). In modo analogo, una forma proposizionale tale che ogni sostituzione rilevante produce una proposizione falsa, è detta da Bolzano *invalida* (*allgemeinungültig*) rispetto alla rappresentazione considerata come variabile (WL §147). Ad esempio

(**) [L'uomo X ha onniscienza],

è una forma proposizionale invalida rispetto a [X].
Le forme proposizionali valide o invalide sono relativamente rare: la maggior parte delle forme proposizionali ha solo un *grado* di validità, cioè una *probabilità* (cfr. Lapointe [2011]). A tal proposito, Bolzano presenta un metodo per esprimere numericamente tale probabilità: egli definisce la probabilità di una forma proposizionale come il rapporto tra il numero delle varianti vere e il numero delle varianti totali (WL §147). Il numero delle varianti dev'essere calcolato tenendo conto delle seguenti regole: (1) se due o più varianti sono equivalenti, se ne considera solo una; (2) in modo analogo a come abbiamo appena visto, bisogna considerare solo quelle varianti che risultano in una proposizione con rappresentazione soggetto oggettuale.
Ad esempio, supponiamo di avere un normale dado a sei facce e consideramo la proposizione

(5) [Il 6 apparirà sulla faccia superiore nel prossimo lancio].

Considerando la regola (1), le due proposizioni

(5_{v1}) [Il 2 apparirà sulla faccia superiore nel prossimo lancio]

e

(5_{v2}) [Un numero diverso da due non apparirà sulla faccia superiore nel prossimo lancio]

sono equivalenti e pertanto conteranno come caso unico. Considerando la regola (2), la proposizione

(5_{v3}) [Il 7 apparirà sulla faccia superiore nel prossimo lancio]

non è considerata una variante. Poiché il numero 7 non compare su nessuna delle sei facce del dado, [il 7] è una rappresentazione anoggettuale.
La probabilità è anche alla base della distinzione bolzaniana tra proposizioni *analitiche* e *sintetiche*. Bolzano addotta la terminologia kantiana, ma definisce la distinzione tra questi due tipi di proposizioni in modo completamente diverso. Notoriamente, Bolzano ha dichiarato che la distinzione kantiana "manca un po' di precisione logica" (WL §148). Bolzano riteneva che Kant avesse sì colto qualcosa di molto importante attraverso questa distinzione, ma che la sua definizione di analiticità non distinguesse le proposizioni analitiche correttamente. Si deve notare però, che la nozione di analiticità di Bolzano

non è intesa come la si concepisce comunemente al giorno d'oggi, cioè come la verità in virtù del significato (o qualcosa del genere). De Jong [2001] ha sottolineato che per Bolzano, la distinzione tra le proposizioni analitiche e sintetiche è connessa ai rispettivi ruoli di queste proposizioni all'interno della scienza e delle spiegazioni scientifiche (torneremo su questo punto nella sezione 4.3).

In Bolzano, le proposizioni analitiche sono quelle proposizioni che hanno una probabilità 0 o 1 relativamente ad almeno una delle rappresentazioni che contengono; le proposizioni sintetiche sono tutte le altre. Detto in modo diverso: una proposizione è analitica *sse* contiene almeno una rappresentazione tale che questa proposizione è assolutamente valida o invalida relativamente a questa rappresentazione; una proposizione è sintetica *sse* non è analitica (WL §148, cfr. de Jong [2001]). Dunque, la proposizione (1) di cui sopra è analitica relativamente a [Caio].

Ci sono due tipi di proposizioni analitiche nella teoria bolzaniana: proposizioni analitiche *in senso ampio* e proposizioni analitiche *in senso stretto* (WL §148). Quest'ultime sono anche dette da Bolzano proposizioni *logicamente analitiche* perché sono analitiche relativamente a tutte le rappresentazioni non-logiche.[13] Esempi di proposizioni logicamente analitiche sono, come scrive Bolzano, proposizioni che affermano che A è A; che A, che è B, è A; che A, che è B, è B; e che ogni cosa è B o non B (WL §148). Queste proposizioni hanno una proprietà epistomologica speciale: per verificare che esse sono analitiche ci basta possedere una certa competenza logica. È tuttavia importante sottolineare che tale competenza logica non è sufficiente per verificare se tali proposizioni siano *vere* o *false*: una competenza non logica potrebbe essere necessaria per verificare se la rappresentazione soggetto è oggettuale (si ricordi che le proposizioni con rappresentazione soggetto anoggettuale sono sempre false, cfr. sezione 3.2). Per esempio, consideriamo

(6) [Un cavallo che ha >2m di altezza, ha >2m di altezza].

Questa proposizione è logicamente analitica: quando sostituiamo tutte le rappresentazioni non-logiche di tale proposizione, cioè [un cavallo] e [>2m di altezza] (quest'ultima va sostituita in maniera identica nelle sue due occor-

[13] È oggetto di discussione se Bolzano sostenga che nelle proposizioni logicamente analitiche *solo* le rappresentazioni logiche rimangono invarianti, o se *solo e tutte* le rappresentazioni logiche rimangono invarianti (cfr. Rusnock [2012], Sebestik [2007]). Sebestik [2007] sottolinea che Bolzano non varia mai le rappresentazioni logiche, ma che del resto egli non lo vieti da nessuna parte.

renze), vediamo che tutte le proposizioni con rappresentazione soggetto oggettuale sono vere. Però, questa conoscenza non è abbastanza per sapere che (6) è vera: per sapere ciò, bisogna sapere se un cavallo più alto di due metri effettivamente ci sia.

Bolzano ammette tuttavia che una determinazione completa della distinzione tra rappresentazioni logiche e non logiche non è ancora stata offerta, e rimane pertanto una questione aperta (WL §148). Tuttavia, è indubbio che Bolzano abbia un concezione più ampia delle rappresentazioni logiche rispetto a quella che adottiamo noi oggi. Per esempio, come ha fatto notare Siebel [2002], Bolzano sostiene che le proposizioni che affermano che ogni cosa è B o non B, cioè proposizioni della forma

(7) [[Qualcosa, che ha B e non B] ha anoggettualità],

sono logicamente analitiche. Ne consegue che non solo [ha] e [non] sono rappresentazioni logiche, ma anche che lo è anche, per esempio, [anoggettualità] (cfr. Roski [2014]). Questo sembra intelligibile alla luce dell'ampiezza della concezione di Bolzano della logica: la semantica fa parte della logica.

Le proposizioni analitiche in senso ampio sono tutte le proposizioni analitiche che non sono logicamente analitiche. Un esempio sarebbe:

(8) [Obama, presidente degli Stati Uniti, ha mascolinità],

che è analitica relativamente ad [Obama]. Si noti che (8) è analitica perché *di fatto* non c'é un presidente statunitense femmina. Dovrebbe essere chiaro a questo punto che l'analiticità bolzaniana non dovrebbe essere intesa come *aprioricità* o verità in virtù del significato.

Sino ad ora abbiamo considerato il metodo della variazione riguardo alle singole proposizioni; altri concetti della logica bolzaniana sono definiti sulla base di *collezioni di proposizioni*.[14] Per i nostri scopi, dovremo prendere in considerazione i due concetti di compatibilità e deducibilità.

La definizione di compatibilità che Bolzano fornisce è la seguente: Una collezione di proposizioni A, B, C, D, ... è *compatibile* relativamente alle rappresentazioni i, j, ... *sse* ci sono rappresentazioni i', j', ... (eventualmente identiche a i, j, ...) tali che quando le si sostituisce a i, j, ... in A, B, C, D, ..., tutte le proposizioni risultanti sono vere. Se non esiste una tale collezione

[14] Poiché le collezioni nella teoria bolzaniana hanno almeno due elementi e i relata delle relazioni di deducibilità e *grounding* possono essere degli insiemi singoletto, non è del tutto corretto parlare di collezioni di proposizioni come relata di deducibilità e *grounding*. Tuttavia ciò non viene tipicamente considerato nell'interpretazione bolzaniana (cfr. Roski [2014]).

di rappresentazioni, la collezione di proposizioni A, B, C, D, ... è *incompatibile* (WL §154).
Ad esempio, le proposizioni

(9) [Questo fiore ha colore rosso],

(10) [Questo fiore ha buon profumo],

(11) [Questo fiore ha appartenenza alla dodicesima classe del sistema di Linneo]

sono compatibili relativamente a [questo fiore], poiché ad esempio la rappresentazione [rosa] rende (9), (10) e (11) contemporaneamente vere. Al contrario, le proposizioni

(12) [[Essere finito che ha onniscienza] ha anoggettualità],

(13) [L'uomo ha essere finito],

(14) [L'uomo ha onniscienza]

sono incompatibili relativamente a [essere finito], [onniscienza] e [uomo], poiché per qualunque sostiuzione le tre proposizioni non risulteranno mai tutte contemporaneamente vere. Una sostituzione che renda vere due delle tre proposizioni, renderà sempre necessariamente falsa la terza.
L'incompatibilità gioca un ruolo rilevante nella pratica scientifica, perché per Bolzano l'incompatibilità di una collezione di proposizioni indica che almeno una delle proposizioni è falsa. Tutte le verità sono infatti compatibili, perché almeno le rappresentazioni che le costituiscono originariamente rendono tali proposizioni vere (WL §154).
Un caso particolare di compatibilità nella teoria bolzaniana è la *deducibilità* (*Ableitbarkeit*). La deducibilità è uno dei due modi in cui delle proposizioni possono *seguire da* altre nella logica bolzaniana (l'altra, la *fondazione* (*Abfolge*, o in termini moderni *grounding*), sarà discussa nella sezione 4.3). La definizione di deducibilità che Bolzano fornisce è generalmente riconosciuta come una pietra miliare nella storia della conseguenza logica (Roski [2014]). In particolare, tale definizione è concettualmente vicina alla definizione modello-teoretica di conseguenza logica che oggi comunemente accettiamo e che pertanto Bolzano sembra aver anticipato di circa un centianaio di anni.

La deducibilità, nella teoria bolzaniana, è così definita: le proposizioni M, N, O, ... sono *deducibili* dalle premesse A, B, C, D, ... relativamente alle rappresentazioni i, j, ..., *sse* A, B, C, D, ... sono compatibili con le proposizioni M, N, O, ... e ogni sostituzione delle rappresentazioni i, j, ... con i', j', ... (eventualmente identiche a i, j, ...) che rende tutte le A, B, C, D, ... vere, rende vere anche tutte le M, N, O, ... (WL §155).
Ad esempio, da

(15) [Caio ha umanità],

si può dedurre

(16) [Caio ha mortalità]

relativamente a [Caio]. Queste proposizioni sono compatibili, ed ogni sostituzione di [Caio] che rende vera (15), renderà vera anche (16).
Si noti che (16) non è deducibile da (15) relativamente a più di una rappresentazione, o relativamente a una rappresentazione diversa da [Caio]. Sostituendo, ad esempio, sia [Caio] che [umanità] in (15), la sostituzione potrebbe portare ad una variante falsa di (16), ad esempio [Dio ha mortalità].
Si noti inoltre che la deducibilità bolzaniana, essendo una relazione *ternaria* tra premesse, conclusione e rappresentazioni variabili, si applica ad una vasta gamma di (collezioni di) proposizioni. Forse persino a *troppe* (collezioni di) proposizioni: ad esempio, non è obbligatorio che le proposizioni che costituiscono le premesse abbiano una rappresentazione in *comune* con le proposizioni che costituiscono la conclusione; nemmeno è obbligatorio che una rappresentazione venga sostituita in *ogni* proposizione (cfr. Roski [2014]). Dunque, ad esempio, da

(17) [Russell ha modestia],

si può dedurre, relativamente a [Russell], ogni verità che non contiene [Russell], ad esempio

(18) [Tarski ha brillantezza].

Al fine di evitare tale inconveniente, Bolzano sviluppò altre due nozioni più ristrette di deducibilità, più vicine alla pratica scientifica dei suoi giorni (Sebestik [2007]). Il primo è la *deducibilità esatta* e assomiglia per certi aspetti alla logica di rilevanza: la deducibilità esatta richiede che ogni premessa e ogni rappresentazione contenuta nelle premesse siano necessarie per dedurre la conclusione (Sebestik [2007]). La definizione: una proposizione M è *esattamente*

deducibile dalle premesse A, B, C, D, ... relativemente alle rappresentazioni i, j, ... *sse* A, B, C, D, ... sono tali che nessuno di loro, nemmeno una qualsiasi delle loro parti, possano essere omesse, con M ancora deducibile dal resto relativemente alle stesse rappresentazioni (WL §155). Deduzioni che non sono esatte sono dette da Bolzano *ridondanti* (*überfüllt*) .
La seconda nozione più ristretta di deducibilità è la *deducibilità logica*. Analogamente alla analiticità logica che abbiamo considerato sopra, la deducibilità logica vale tra (collezioni di) proposizioni che sono deducibili l'una dall'altra relativamente a *tutte le rappresentazioni non-logiche*. La deducibilità logica è così definita: le proposizioni M, N, O, ... sono *logicamente deducibili* dalle premesse A, B, C, D, ... relativamente alle rappresentazioni i, j, ..., *sse* le proposizioni M, N, O, ... sono *deducibili* dalle premesse A, B, C, D, ... relativamente alle rappresentazioni i, j, ..., e i, j, ... sono tutte le rappresentazioni non-logiche che sono contenute in A, B, C, D, ..., M, N, O, ... (WL §155). Dunque, mentre la deducibilità e la deducibilità esatta bolzaniane sono relazioni ternarie, la *deducibilità logica* può invece essere vista come una relazione *binaria* tra le premesse e la conclusione.
In particolare, la deducibilità logica bolzaniana è considerata simile alla nozione tarskiana di conseguenza logica. Come dice Sebestik [2007], la prima formulazione di Tarski nei termini della sostituzione è semplicemente una parafrasi della definizione bolzaniana di deducibilità logica. Le principali differenze consistono, primo, nel fatto che nella concezione di Tarski ciò che viene variato sono oggetti in un dominio, mentre per Bolzano, ciò che è variato sono rappresentazioni (anziché gli oggetti che cadono sotto di essi) e, secondo, nel fatto che Tarski non richiede la compatibilità delle premesse. Lapointe [2011] ha sottolineato che proprio la condizione della compatibilità fa sì che la concezione di Bolzano assomigli a molte logiche non-classiche contemporeanee.

4.3 Spiegazione scientifica o *grounding*

Abbiamo visto nella sezione precedente che sulla base del metodo della variazione Bolzano elaborò nozioni relativemente avanzate per la relazione di *seguire da* tra (collezioni di) proposizioni. Nessuna delle nozioni di deducibilità finora presentate, però, erano per Bolzano sufficienti per garantire gli standard elevati richiesti dalle prove *propriamente scientifiche*. Egli credeva fermamente che in un metodo scientifico appropriato le prove dovessero essere anche *esplicative*. Non è eccessivo affermare che quest'idea aristotelica sia stata una delle influenze più forti sulle opere di Bolzano: è stata di grande influenza sia sui suoi pensieri sulla metodologia scientifica (cfr. Betti [2010], Roski [2014]), che sulla sua pratica matematica (cfr. Mancosu [2008]). La sua adesione a quest'idea in pratica ha portato ad importanti risultati matematici, come la sua prova puramente analitica del teorema dei valori intermedi.

Potrebbe pertanto stupire che Bolzano non sia mai riuscito a definire la nozione di prova esplicativa in un modo che lo soddisfacesse pienamente (WL §§221, 378). Riuscì solo a presentare alcune caratteristiche ed esempi di proposizioni che si trovano in una relazione esplicativa. Ciò nonostante, le riflessioni di Bolzano sulla spiegazione scientifica hanno ispirato sia il dibattito sulle prove esplicative in matematica (Mancosu [2008]), che il dibattito sul *grounding* nella metafisica contemporanea (Correia e Schnieder [2012]).

Bolzano ebbe modo di riflettere sulla nozione di prova esplicativa in svariate opere e ancora una volta è nella WL che ne troviamo l'esposizione più matura. In questa sezione considereremo il nocciolo delle idee di Bolzano sulla spiegazione scientifica, e le ragioni per cui non riuscì a darne una definizione soddisfacente.

Per dare un'idea intuitiva di cosa dovrebbe essere una prova esplicativa, prendiamo in considerazione queste due proposizioni (uno degli esempi preferiti di Bolzano):

(19) [In estate fa più caldo che in inverno],

e

(20) [In estate, il termometro indica una temperatura più alta che in inverno].

Si osservi che è possibile dedurre, relativamente ad [estate] e [inverno], sia (19) da (20), che (20) da (19): ogni volta che una di loro è vera, l'altra è vera anche (cfr. sezione 3.1). In altre parole, la relazione di deducibilità (relativamente a [estate] e [inverno]) vale nelle due direzioni. Ma ovviamente: in estate, il termometro indica una temperatura più alta che in inverno *perché* in estate fa più caldo che in inverno, e non viceversa. Questa relazione a senso unico, espressa da 'perché', è quello che Bolzano chiama la *fondazione* (*Abfolge*), e che è detto in termini moderni il *grounding* (WL §§177, 198).[15]

Per come la concepiva Bolzano, la fondazione è una relazione tra un *fondamento* (*Grund*) e una *conseguenza* (*Folge*). Sia i fondamenti che le conseguenze consistono di proposizioni *vere*. L'idea è che il fondamento è ciò che

[15] Betti [2010] sottolinea che per Bolzano la fondazione corrisponde al 'perché' *in senso tecnico*, cioè non semplicemente all'uso ordinario della parola 'perché' (contra Tatzel [2002]).

rende vera la conseguenza. Il fondamento può essere una proposizione o una collezione di proposizioni; la conseguenza, invece, è sempre una collezione di proposizioni (WL §162). Una proposizione che è una parte (propria) di un fondamento è detta da Bolzano un *fondamento parziale* (*Theilgrund*); una proposizione che è una parte (propria) di una conseguenza è detta una *conseguenza parziale* (*Theilfolge*; WL §168). In questo esempio, (19) è il fondamento (o il fondamento parziale, Bolzano non specifica questo punto) di (20), e (20) è la conseguenza parziale di (19). Ad esempio, oltre a (20), anche la seguente è una conseguenza parziale di (19):

(21) [[In estate fa più caldo che in inverno] ha verità].

La fondazione, cioè la relazione tra un fondamento e la sua conseguenza, è per Bolzano la relazione *oggettiva* tra verità. Secondo Bolzano, le prove propriamente scientifiche devono riflettere questa relazione oggettiva. Vale a dire, in una prova propriemente scientifica, la verità da provare è dimostrata dal suo fondamento. Si può dire allora, che nella teoria di Bolzano la fondazione è la relazione secondo cui certe proposizioni *seguono da* altre nelle prove esplicative (cfr. Roski [2014]). Mentre la deducibilità esprime una nozione tipicamente logica di 'seguire da', cioè come conservazione di verità, il grounding esprime una nozione *ontologica* di 'seguire da' (cfr. Detlefsen [1988], Mancosu [1999], Rumberg [2013]).
Perché un appropriato metodo scientifico dovrebbe richiedere che le prove esibiscano tale relazione oggettiva? La risposta è da rintracciarsi nell'adesione di Bolzano all'ideale classico delle scienze e nell'interpretazione che egli ne dà.[16] Secondo quest'ideale, che ebbe origine negli *Analitica posteriora* di Aristotele e ha ispirato, ad esempio, *Gli elementi* di Euclide, una scienza è una collezione di verità dotata di una certa coerenza, organizzata in un certo modo e con una distinzione tra gli elementi fondamentali e non fondamentali (de Jong e Betti [2010]). Come dicono de Jong e Betti, in termini classici, l'ideale classico riflette la conoscenza scientifica come *cognitio ex principiis*, conoscenza dai principi; in termini moderni, quest'ideale riflette una concezione della scienza come sistema assiomatico [2010]. Bolzano insiste fermamente che i principi, o gli assiomi, non sono semplicemente l'origine della conoscenza, ma sono anche gli elementi primari, i *fondamenti ultimi*,

[16] Per un'analisi di quest'ideale e un riassunto della sua influenza nella storia della filosofia, si veda de Jong e Betti [2010]. Secondo questi autori, la WL di Bolzano è, accanto agli *Analitica posteriora* di Aristotele e alla *Logica di Port-Royal*, la terza pietra miliare nella storia di questo ideale. Per un'analisi precedente, si veda de Jong [2001].

nell'ordine oggettivo. Con Aristotele, Bolzano ha sostenuto che la conoscenza del perché un certa verità sia vera, cioè, nella terminologia bolzaniana, la conoscenza del *fondamento* di una verità, è una conoscenza di un tipo superiore rispetto alla mera conoscenza del fatto che tale verità è vera. Per questa ragione, Bolzano ha sostenuto la superiorità della fondazione di una verità rispetto alla semplice deduzione di tale verità. Bolzano sottolinea inoltre come nel processo di ricerca della fondazione di una verità, spesso scopriamo altre verità prima sconosciute (BE introduzione, ML §14). Da ciò segue che per Bolzano i fondamenti ultimi *non* sono verità *evidenti*, ma sono invece verità, in senso oggettivo, *indimostrabili*.
Come trovare quest'ordine oggettivo delle verità? Alcune caratteristiche della fondazione sono evidenti per Bolzano (WL §221). Per iniziare, le verità puramente concettuali sono fondate in altre verità puremente concettuali e mai in verità intuitive o miste (cfr. sezione 3.1). Ne segue che la prova kantiana

(22) [Questo triangolo ha gli angoli la cui somma equivale a due retti],

e poi

(23) [Triangolo ha gli angoli la cui somma equivale a due retti],

non è una prova propriamente scientifica per Bolzano (dato che (22) contiene l'intuizione [questo], cfr. sezione 3.1; WL §197, cfr. de Jong [2001]). Inoltre, secondo Bolzano il fondamento è *almeno altrettanto semplice* e *più generale* della conseguenza.[17] Vale a dire, il contenuto del fondamento comprende al massimo tante parti quante ve ne sono nel contenuto della conseguenza e l'estensione del fondamento è più grande dell'estensione della conseguenza (cfr. sezione 3.1). Queste due caratteristiche implicano, ad esempio, che (23) sia il fondamento di

(24) [Triangolo equilatero ha gli angoli la cui somma equivale a due retti],

poiché [triangolo] è più semplice e più generale di [triangolo equilatero].[18] Si noti che (24) è una verità *analitica* relativamente ad [equilatero], mentre (23)

[17] Nella WL, Bolzano non dice esplicitamente che il fondamento debba essere più generale della conseguenza (ma lo suggerisce); lo dice invece esplicitamente nella ML §17.

[18] Potrebbe sembrare strano dire che una collezione infinita (cioè l'estensione di [triangolo]) sia più grande di un'altra collezione infinita (l'estensione di [triangolo equilatero]). Nella teoria di Bolzano però, il principio secondo cui un intero è sempre più grande della sua parte propria vale anche per le collezioni infinite (Mancosu [2009]).

è invece una verità *sintetica* (si veda sezione 4.2). De Jong ha fatto notare che, per Bolzano, ogni verità analitica è fondata in una verità sintetica corrispondente [2001].[19] Questo sembra ragionevole, dato che, secondo Bolzano, il fondamento è almeno altrettanto semplice e più generale della conseguenza, mentre una verità analitica è più complessa e meno generale della sua verità sintetica corrispondente. Ne segue che per Bolzano le verità che costituiscono una scienza sono principalmente verità sintetiche; le verità analitiche giocano solo un ruolo minore nella scienza (WL §12; de Jong [2001]).
Inoltre, Bolzano sostiene che le verità e le rappresentazioni che costituiscono la fondazione di una verità, appartengono alla stessa scienza oppure ad una scienza più fondamentale della scienza a cui appartiene tale verità.[20] Ne segue che il cosidetto sconfinamento in un'altra scienza, come ad esempio l'utilizzo di verità geometriche per provare verità dell'analisi, non risulta mai in una prova propriamente scientifica (cfr. RB introduzione).[21] In aggiunta, e molto importante, per Bolzano la fondazione è una relazione *unica*: ad ogni fondamento corrisponde essattamente una conseguenza e viceversa (WL §§206, 528). Dunque, possiamo dire che la fondazione assegna ad ogni verità il suo posto nella gerarchia delle proposizioni propriemente scientifiche. La connessione oggettiva delle verità secondo la relazione di fondazione appare come, per così dire, un *albero*, le cui radici rappresentano le verità fondamentali ultime e le cui foglie corrispondono alle verità analitiche (Rumberg [2013], Sebestik [1992], Waldegg [2001]).[22]

[19] De Jong non chiarisce cosa si debba intendere per 'corrispondente', ma possiamo dire in linea con la sua argomentazione che una verità sintetica *corrisponde* ad una verità analitica (e viceversa) se, come in questo caso, la verità analitica riguarda una sottocollezione di quegli oggetti a cui la verità sintetica si riferisce.

[20] Non è chiarissimo che cosa significhi 'appartenere ad una scienza' e Bolzano omette di precisarlo. Secondo de Jong e Betti, questo punto è conesso a ciò che essi chiamano il 'postulato del dominio' (*domain postulate*), ovvero il requisito per il quale una scienza deve riguardare oggetti dello stesso campo scientifico [2010].

[21] Quest'ultima idea ha senso alla luce del principio aristotelico della *metbasis eis llo génos*. Per un'analisi del ruolo di questo principio nella logica di Bolzano, in particolare la sua logica come presentata nel BY, si veda Centrone [2012].

[22] In Rumberg [2013], dove la nozione bolzaniana di fondazione viene analizzata sullo sfondo della teoria della dimostrazione, gli alberi di fondazione sono construiti nella direzione contraria: le verità fondamentali appaiono come le foglie. Nella concezione di Waldegg invece, gli alberi di fondazione si basano sulle verità fondamentali (e dunque le verità fondamentali appaiano come le radici dell'albero; [2001]). Quest'ultima concezione sembra la più ragionevole, data che partendo delle verità fondamentali le catene della fondazione crescono in complessità.

Esiste un modo di definire la fondazione? Bolzano era incerto circa questo punto, poichè non era in grado di stabilire se la fondazione fosse una relazione *primitiva* e dunque *indefinibile*, oppure *complessa* e quindi *definibile* (cfr. Betti [2010]). A volte, egli crede che la fondazione possa essere definita come una specie di deducibilità (WL §§200, 221), e infatti, alcuni studiosi ritengono che egli avrebbe potuto e dovuto definire la fondazione come una specie di deducibilità (cfr. Betti [2010], de Jong [2001], Roski [2014], Rusnock [2000]). Però, con un argomento altamente complicato, egli dimostra anche che la fondazione *non* può essere definita sulla base della deducibilità (WL §200). Come è sottolineato da Betti [2010], tuttavia, non è del tutto chiaro che cosa questo argomento mostrerebbe, e su questo punto rimangono ancora molte cose da chiarire.

5. LA MATEMATICA E IL SUO METODO

L'utilità delle idee di Bolzano sulle prove propriamente scientifiche si manifesta appieno nella sua pratica matematica. È infatti innegabile che furono proprio queste idee a consentirgli di superare alcuni di quegli ostacoli matematici che tanto turbavano i suoi colleghi matematici, e di sviluppare concetti e prove che sono ancora usati ai nostri giorni (Russ [2004], Rusnock [2000], Sebestik [1992]). La sua prova puramente analitica del teorema del valore intermedio (RB) ne è un esempio particolarmente calzante: è proprio in virtù delle sue idee sulla collocazione dell'analisi nella gerarchia oggettiva delle scienze che egli si trovò costretto, nella dimostrazione di tale teorema, a ricorrere alle verità dell'aritmetica (anziché a quelle della geometria, come si faceva solitamente). Ciò gli permise di sviluppare il concetto moderno di convergenza.

In questa sezione vedremo in che modo Bolzano sviluppò le sue idee sulla matematica in accordo con la sua visione generale della scienza (che abbiamo discusso nella sezione precedente). Nella sezione 5.1 vedremo in che modo Bolzano fondò la matematica sulla sua logica e sulla teoria degli interi e delle parti. Nella sezione 5.2, invece, ci preoccuperemo di fornire un quadro riassuntivo delle sue idee in merito alla nozione di infinito.

5.1 GLI OGGETTI MATEMATICI

Trovare una definizione soddisfacente per la matematica è un problema ben noto in filosofia della matematica. Anche Bolzano lottò tutta la vita per tro-

vare la definizione giusta.[23] In uno dei suoi primi lavori, BD, Bolzano scrive che la definizione comune al suo tempo, cioè la matematica come scienza della quantità, sembrava sbagliata, poiché la matematica si deve occupare sì di quantità, ma anche di altri oggetti che non sono quantità, ad esempio punti e permutazioni (BD §3). In seguito tuttavia, nel manoscritto *Teoria delle quantità* (*Größenlehre*, da ora in poi GL), in cui si propose di dare un fondamento alla matematica che fosse conforme alla logica da lui sviluppata nel WL, Bolzano accetterà la definizione comune (GL §§1,2), pur sottolineando come si tratti di un errore ritenere che la matematica riguardi *solo* le quantità (anche le permutazioni sono soggetti della matematica), o che le quantità siano considerate *solamente* nella matematica (svolgono un ruolo anche, per esempio, in psicologia). Tale definizione comune fu da lui accettata semplicemente perché non sapeva come fare di meglio (GL §2).
Anche se Bolzano non riuscì a fornire una definizione precisa della matematica, egli ebbe opinioni forti circa le caratteristische della matematica come una scienza propria, che conservò per tutta la vita. Per cominciare, secondo Bolzano la matematica è una scienza *puramente concettuale*, il che significa priva di intuizioni (BD §§7,8; GL §2; cfr. sezione 3.1).[24] La critica di Bolzano a Kant su questo punto è un aspetto costante nelle sue opere (cfr. Cantù [2014]). Come sottolinea Cantù, ne consegue che Bolzano non ha alcun problema ad accettare oggetti privi di un'intuizione corrispondente, come le linee infinite e le quantità immaginarie [2014]. Inoltre, Bolzano ritenne sempre che la matematica, come scrive Cantù, fosse una *scientia universalis*: la matematica è la scienza della quantità in generale, e come tale la base delle scienze speciali che si occupano di specifici tipi di quantità (come ad esempio la geometria e la cronometria). Inoltre, Bolzano ha sempre accettato una definizione molto ampia di quantità, tale che sia gli oggetti fisici che mentali, e da WL in poi anche quelli lektologici, possono essere considerati come quantità.
Che cos'è una quantità? Secondo la definizione che Bolzano fornisce nel GL, "chiamiamo qualsiasi oggetto una quantità, se lo consideriamo come appartenente ad una specie di cose, tra tutte le quali possiamo affermare uno e solo uno dei seguenti rapporti reciproci: o sono uguali l'una all'altra, o una contiene una parte che è uguale all'altra" (§1).[25] In altre parole, secondo Bolzano,

[23] Per una sintesi ed un'interpretazione delle varie definizioni di matematica che Bolzano fornisce, si veda (Cantù [2014]).

[24] Nel BD, le intuizioni sono rappresentazioni di un individuo (BD appendice §2).

[25] Il resconto più dettagliato della teoria bolzaniana delle quantità è presentato nel GL, ma molte idee imporanti (che saranno poi precisate sulla base della sua nuova logica) sono

un oggetto A è una quantità *sse* c'è una rappresentazione [B] tale che A cade sotto [B] (vale a dire, A ha la qualità B, o b-ità) e per ogni altro oggetto A' che cade sotto [B], la b-ità di A e la b-ità di A' rendono vera uno e solo uno dei rapporti reciproci: o sono uguali l'una all'altra, o una contiene una parte che è uguale all'altra. Due (o più) oggetti che hanno una tale qualità B in comune sono chiamati da Bolzano *quantità dello stesso genere* (cfr. EB §1). Ad esempio, due linee sono quantità dello stesso genere, poiché hanno una qualità (la loro lunghezza) tale che o la lunghezza di entrambe la linee è altrettanto grande, o la lunghezza di una di loro contiene la lunghezza dall'altra come parte.

Si noti come Bolzano si serva della nozione di *parte* per definire la nozione di quantità. Tale nesso concettuale è una della idee più importanti di Bolzano (e, come dice Sebestik [2011], profetiche). Si ricorderà che, come abbiamo visto nella sezione 3.3, ogni oggetto con parti è detto da Bolzano una *collezione*. Dunque, in Bolzano le quantità in matematica sono considerate come *collezioni*. Le quantità possono essere paragonate e determinate *in quanto* sono composte di parti. Bolzano *fonda* la sua matematica sulla sua teoria delle collezioni, definendo sia l'*uguaglianza* che il *numero* sulla base delle collezioni. L'uguaglianza è definita da Bolzano sulla base della *sostituzione* (*austauschen*) delle parti di quantità dello stesso genere. Due quantità dello stesso genere sono uguali *sse* possiamo trasformare l'una nell'altra sostituendo le parti dell'una alle parti dell'altra. Se una tale trasformazione non è possibile (cioè, se dopo che tutte le parti di una di queste quantità sono state sostituite con le parti dell'altra, in quest'ultima rimangono ancora delle parti), allora una di queste due quantità contiene una parte uguale all'altra e le due quantità sono disuguali (WL §87). Occorre tuttavia specificare la nozione di 'parte' in questa definizione. L'uguaglianza per Bolzano è relativa ad una scelta di *unità*, vale a dire, relativa a ciò in base a cui vogliamo paragonare le quantità (WL §§86, 87; cfr. sezione 3.3). Ad esempio, due libri possono essere uguali relativamente alle quantità delle loro pagine, ma disuguali relativamente alle quantità delle parole che essi contengono.

La determinazione delle quantità, secondo Bolzano, è quello che chiamiamo *calcolo* o *misurazione* ed avviene tramite i *numeri* (GL §2). Anche per una

già presente nel manoscritto *Sul concetto di quantità e dei suoi vari generi* (*Uiber den Begriff der Größe und die verschiedenen Arten derselben*, da ora in poi BG). Questa definizione di quantità differisce significativamente dalla definizione data nel precedente BG solo per il fatto che in quest'ultimo egli riteneva che la divisibilità dell'oggetto fosse una condizione essenziale per essere una quantità (cfr. BG §9).

tale determinazione occorre inanzitutto scegliere un'unità. Per determinare una quantità, misuriamo o calcoliamo la *molteplicità* (cfr. sezione 3.3) delle unità che compongono la quantità.
Abbiamo visto nella sezione 3.3 che le unità e le molteplicità sono relative ad una certa specie di oggetti A. Questi, dunque, non sono i numeri dei matematici: nella matematica, ad esempio, ci chiediamo quanto fa 2 + 3, anziché quanto fa, ad esempio, 2 mele + 3 mele. Pertanto, Bolzano distingue tra molteplicità, o numeri, *denominati* (*benannt*) e molteplicità, o numeri, *senza nome* (*unbenannt*; EG §122, RZ §10), per poi definire i numeri dei matematici come *numeri concreti senza nome* (RZ §12). Esaminiamo quest'idea più attentamente.
Un numero (o una molteplicità) di specie A è principalmente un numero *concreto* di specie A, vale a dire, è un certo tipo di collezione di oggetti di specie A (cfr. sezione 3.3). Ad ogni numero concreto di una certa specie A, o in altre parole ad ogni *numero concreto denominato*, corrisponde nella teoria bolzaniana la *qualità* di essere tale numero concreto denominato. Questa qualità è detta da Bolzano il numero *astratto* di specie A corrispondente, o il *numero astratto denominato* corrispondente (RZ §11). Ad esempio, una collezione di tre mele è, secondo Bolzano, un numero concreto denominato; la qualità di essere una collezione di tre mele è il numero astratto denominato corrispondente. Ma che cosa hanno in comune una collezione di tre mele e una collezione di tre pere? La qualità di essere una collezione di tre *oggetti*, avrebbe risposto Bolzano (cfr. RZ §11). Questa qualità è detta da lui il *numero astratto senza nome* corrispondente a queste due collezioni; di fatto, tale qualità corrisponde a *tutte* le collezioni di tre oggetti. Dunque, nella teoria di Bolzano, *un numero astratto senza nome n è una qualità la cui estensione include esattamente tutte le collezioni di n oggetti* (RZ §12). A sua volta, ad un numero astratto senza nome n corrisponde, nella teoria di Bolzano, un *numero concreto senza nome n*. Questi sono i numeri naturali dei matematici. Dunque, secondo Bolzano, quando i matematici dichiarano che $2 + 3 = 5$, stanno dichiarando che, per ogni tipo di oggetti, una collezione di due oggetti e una collezione di tre oggetti fanno una collezione di cinque oggetti (RZ §11).
In questo modo, Bolzano sviluppa, mezzo secolo prima di Frege, una teoria dei numeri naturali sulla base delle collezioni. A loro volta, i numeri naturali servono a Bolzano come base per gli altri numeri. Un aspetto della sua teoria che è relativamente molto discusso e merita attenzione anche in questo profilo riguarda la fondazione (cioè, l'aritmetizzazione) dell'analisi (cfr. Sebestik

[1992]).
Occorre inanzitutto introdurre i *concetti di numero finito* e *infinito* (*endlicher* e *unendlicher Zahlbegriffe*). Entrambi sono concetti che sono composti a partire dai numeri naturali e dalle operazioni aritmetiche (cioè addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; RZ, quarta sezione, §3).[26] Nel concetto di numero finito la quantità dei numeri naturali e delle operazioni aritmetiche è finita, nel concetto di numero infinito questa quantità è infinita. I primi sono anche detti da Bolzano *numeri razionali* e sono equivalenti (*gleichgeltend*) a zero, un numero intero (positivo o negativo), o una frazione semplice (RZ, quarta sezione, §5). I concetti di numero infinito, invece, possono essere infinitamente piccoli o grandi. Esempi di concetti di numero infinito sono $1+2+3+4+...ad\ inf$ e $\frac{1}{1+1+1+...ad\ inf}$ (RZ, settima sezione, §§2,21).
Tra i concetti di numero finito e infinito, possiamo distinguere quelli *misurabili* (infatti, concetti di numero finito sono sempre misurabili). I numeri misurabili di Bolzano sono equivalenti al continuo moderno in cui i numeri reali sono classi di equivalenza di successioni convergenti di numeri razionali (Kurka e Trlifajov [n.d.]). L'idea è che un numero è misurabile quando ci sono due serie di frazioni convergenti verso zero che racchiudono il numero superiormente ed inferiormente (Laugwitz [1965], Sebestik [2011]). Due numeri misurabili sono *equivalenti* quando la loro differenza "ha le stesse caratteristiche di zero nel processo di misurazione (cioè si comporta come zero)" (RZ, settima sezione, correzione della §53). È importante però notare che per Bolzano due numeri equivalenti *non* sono *identici*. Bolzano sottolinea che i numeri infinitamente piccoli *non* sono equivalenti a zero *in ogni rispetto*, ma solo *relativemente* al processo di misurazione (RZ, settima sezione, §58). Dunque, il continuo di Bolzano è il continuo cosiddetto *ricco*, contenente accanto ai numeri misurabili anche le quantità infinitamente piccole e grandi (cfr. Lakatos [1980]). È sottolineato da Kurka & Trlifajov [n.d.] che, mentre i numeri reali moderni (in quanto classi di equivalenza) sono oggetti statici, i numeri reali di Bolzano (come quelli di Cauchy) sono *dinamici*: per Bolzano, un numero reale è un *processo di approssimazione*, anziché il risultato di tale processo.
Meno discusse, ma altrettanto interessanti, sono le idee di Bolzano sull'analisi complessa. Bolzano sostiene che la rappresentazione [$\sqrt{-1}$] sia *contrad-*

[26] Bolzano scrive che i concetti di numero finito e infinito sono composti a partire dai numeri naturali e dalle operazioni aritmetiche *in modo intellegibile* (*auf verständlicher Weise*). Egli non specifica che cosa ciò significhi, ma probabilmente intende che, ad esempio, non è permesso avere due operazioni aritmetiche senza un numero tra loro.

dittoria (si veda sezione 3.1), e conseguentemente che *non ci siano* numeri immaginari (WL §§29, 70; PU §§14, 37). Sebbene non lo dichiari mai esplicitamente, possiamo ragionevolmente dedurre dalla teoria di Bolzano che la sua ragione per ritenere contraddittoria la rappresentazione [$\sqrt{-1}$] sia la seguente. I numeri naturali fondano tutti gli altri numeri (cioè, i numeri 'impropri' nella terminologia di Bolzano), e quindi questi ultimi devono essere consistenti con i numeri naturali e le loro leggi (cfr. Sebestik [2011]). Probabilmente, secondo Bolzano è vero, non solo per i numeri naturali ma anche per tutti gli altri numeri, che ogni numero quadrato è positivo. Ne segue che la rappresentazione [$\sqrt{-1}$] è contraddittoria (si veda sezione 3.1). Si noti che ciò implica non solo che nella teoria bolzaniana i numeri immaginari non ci sono, ma anche che questi numeri non possono essere oggetti (nel senso di rappresentazioni soggetto) di verità (WL §108; cfr. sezione 3.2). Dunque, in prima battuta sembra che la sua logica gli impedisca di incorporare i numeri imaginari nella sua teoria.

Tuttavia, Bolzano riesce ad incorporare i numeri immaginari nella sua teoria ricorrendo ad uno stratagemma molto originale, ossia impiegando il suo metodo della variazione (si veda sezione 4.2). Bolzano riconobbe (per primo, Sebestik [2011]) che le equazioni sono semplicemente enunciati dell'equivalenza di due rappresentazioni (WL §108). Però, l'equivalenza è in primo luogo definita per rappresentazioni *oggettuali*: due rappresentazioni sono equivalenti *sse* hanno la stessa estensione, dove l'estensione di una rappresentazione è definita come la *molteplicità* (si veda sezione 3.3) degli oggetti che cadono sotto di essa. Come è possibile affermare che due rappresentazioni *anoggettuali* sono equivalenti, dato che non hanno estensione? Per mezzo della teoria della variazione: secondo Bolzano, due rappresentazioni anoggettuali sono equivalenti *sse* sostituendo in queste rappresentazioni le loro parti (in maniera ragionevole) con altre rappresentazioni che le rendano oggettuali, otteniamo coppie di rappresentazioni equivalenti (WL §447, ML §5, PU §37; cfr. Cantù [2003]).

5.2 L'INFINITO

Ciò per cui Bolzano è maggiormente famoso al giorno d'oggi, e ciò che lo rese principalmente famoso nel corso della storia, sono probabilmente le sue indagini sull'infinito. Il suo *Paradoxien des Unendlichen* (*Paradossi dell'infinito*, da ora in poi PU), in cui Bolzano per primo intraprese uno studio sulle collezioni infinite, venne pubblicato nel 1851, tre anni dopo la suo morte, e fu

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

molto ammirato da Peirce, Cantor e Dedekind (tra gli altri). A Bolzano viene comunemente riconosciuto il merito d'aver anticipato la teoria del transfinito di Cantor.

L'argomento con cui Bolzano dimostra che c'è almeno una collezione infinita potrebbe apparire familiare. Egli fornisce due argomenti diversi, ma entrambi si basano sullo stesso principio: per ogni numero n, l'affermazione che ci sono n verità, implica che ci sono $n + 1$ verità. Il primo di questi due argomenti procede in questo modo: per ogni numero n, dall'assunzione che ci sono almeno n verità, l'asserzione che non c'è nessuna verità in più costituirebbe un'altra verità e dunque ne conseguirebbe che ci sono (almeno) $n + 1$ verità (WL §32). Il secondo procede così: per ogni verità p, la proposizione [p ha verità] costituisce un'altra verità e di nuovo ne consegue che ci sono (almeno) $n + 1$ verità (WL §§32, 530; PU §13). Entrambi questi argomenti implicano, per assurdo, che non può esserci un numero n tale che non ci siano più di n verità e dunque che la totalità delle verità è più grande di ogni collezione finita, o in altre parole: è una collezione *infinita*. Si noti inoltre che entrambi questi argomenti stabiliscono che la totalità delle verità è tale che *ogni collezione finita* di verità *è solo una parte propria* della totalità delle verità (cfr. WL §87). Dato che c'è almeno una verità (Bolzano lo dimostra nella WL §31 e nei PU §14) Bolzano ha dimostrato che c'è almeno una collezione infinita. In particolare, il secondo argomento di Bolzano assomiglia molto all'argomento che Dedekind adotta per dimostrare l'esistenza di una totalità infinita nel suo *Che cosa sono e a cosa servono i numeri?* (*Was sind und was sollen die Zahlen?*; Dedekind aveva certamente già letto i PU; si veda Mariani [2011] e la letteratura ivi citata).

Si noti che questi due argomenti di Bolzano non implicano ancora l'infinito attuale: si può dire che Bolzano ha semplicemente definito due algoritmi per costruire, data una qualsiasi collezione di n verità, un'altra verità. Sembra che anche Bolzano stesso concepisse tale argomento in questo senso: egli sottolinea che questi argomenti rappresentano dei modi di inferenza che possono sempre essere estesi (*daß sich diese Schlußart sich immer weiter fortsetzen lassen*; WL §32, cfr. PU §33). Da un punto di vista moderno, possiamo dire che gli esempi che Bolzano fornisce sono esempi analoghi ai cosidetti *insiemi induttivi* (Mariani [2011]).

Forse, la ragione principale per cui Bolzano è considerato un sostenitore dell'infinito attuale è da ricercarsi nell'argomento che egli propone per rispondere alla seguente obiezione. Secondo alcuni, non c'è nessuna collezione infinita, perché non è possibile per un essere pensante immaginare uno per uno tutti gli oggetti di una collezione infinita (PU §14, cfr. WL §87). Ovviamente, per Bolzano è irrilevante che un essere pensante possa immaginare qualcosa per stabilire se la tal cosa c'è o non c'è. Come abbiamo visto nella sezione 3.1, infatti, se gli oggetti lektologici ci siano oppure no è una questione che va decisa sulla base della loro rappresentazione: questa rappresentazione è oggettuale (e dunque, i loro oggetti ci sono) *sse* questa rappresentazione è non-contradittoria. Dunque, l'esserci delle collezioni infinite di oggetti lektologici (come le verità) è semplicamente dato, nella teoria di Bolzano, in virtù della loro non-contradditorietà. Poiché, come scrive Bolzano, non c'è nessuna ragione per ritenere che la rappresentazione di una collezione infinita di verità sia contraddittoria, ne segue che per Bolzano una tale collezione infinita c'è.[27]

Come è ben noto, Dedekind fu il primo a definire le collezioni (o *sistemi* nella sua terminologia) infinite sulla base della loro *riflessività*. Secondo la sua definizione, un sistema S si dice *infinito* se è simile a (cioè, può essere messo in corrispondenza biunivoca con) una sua parte propria; in caso contrario S è detto un sistema *finito* (Dedekind [1888, §64]). Anche se Bolzano non *definisce* le collezioni infinite come collezioni riflessive, egli riconosce tuttavia che *tutte e solo* le collezioni infinite sono riflessive (PU §20).

Perché Bolzano non definisce le collezioni infinite sulla base della loro riflessività? Dal punto di vista post-cantoriano, questa può sembrare l'unica opzione ragionevole, ma dovremmo tenere a mente che fin dall'antichità la riflessività delle collezioni infinite rappresentava uno degli argomenti standard *contro* l'infinito attuale (Mancosu [2009], Mariani [2011]). Infatti, riguardo all'infinito abbiamo due idee diverse e contraddittorie (cfr. Mancosu [2009], Mariani [2011]):

1. Un intero è sempre più grande di ciascuna delle sue parti (proprie);
2. Due collezioni che possono essere messe in corrispondenza biunivoca hanno la stessa grandezza.

[27] È mia opinione che questo argomento, tuttavia, possa giustificare l'idea che Bolzano accettasse l'infinito attuale solo se si assume che Bolzano fosse *platonista* in merito agli oggetti lektologici. Se invece, seguendo Cantù (si veda sezione 3.2), accettiamo che Bolzano fosse piuttosto un *oggettivista semantico* in merito a tali oggetti, allora non sembrano esserci ragioni per sostenere che egli accettasse l'infinito attuale. Un'argomentazione completa in tal proposito, tuttavia, esula dai limiti e dagli scopi del presente lavoro, e mi riservo pertanto di discutere estesamente tale congettura in altra sede.

Come è ben noto, Cantor ha trascurato 1. e fatto leva su 2. per definire la nozione di grandezza per gli insiemi infiniti. Bolzano, invece, attribuisce grande importanza a 1. e presenta vari argomenti secondo cui il fatto che due collezioni possano essere messe in corrispondenza biunivoca non è sufficiente per concludere che queste due collezioni abbiano la stessa molteplicità (e.g. PU §§21-23; cfr. Mariani [2011]).
Berg sostiene però che, alcuni mesi prima della sua morte, Bolzano abbandonò questa posizione e diventò, per così dire, un buon cantoriano (si veda l'introduzione di Berg alla traduzione (1973) in inglese della WL, citato in Mancosu [2009]). L'affermazione di Berg si basa su una lettera di Bolzano al suo alievo Robert Zimmermann, da cui risulta che Bolzano alla fine sostenne (in contrasto con quello che aveva scritto nella WL §102, ma in accordo con PU §33) che la collezione dei numeri naturali avesse la stessa molteplicità della collezione dei quadrati, delle potenze quarte, ottave, ecc. Come Bolzano scrive nel PU §33, quando eleviamo al quadrato ogni singolo componente della serie dei numeri naturali, modifichiamo semplicemente una *qualità* (*Beschaffenheit*) di questi numeri, ossia la loro *quantità* (*Große*); la loro *molteplicità* (*Vielheit*), invece, rimane la stessa. Ciò significa, secondo Berg, che Bolzano (come Cantor) abbandonò l'idea secondo cui un intero è sempre più grande di ciascuna delle sue parte (proprie) e accettò l'idea secondo cui la corrispondenza biunivoca fosse il criterio dell'uguaglianza tra collezioni infinite (Mancosu [2009]).
Tuttavia, la tesi che Bolzano abbia infine accettato 2. come criterio di uguaglianza per le collezioni infinite abbandonando completamente 1. è alquanto incerta. Difficilmente questa tesi sembra conciliabile con ciò che Bolzano afferma nel PU §§21-23, vale a dire che i segmenti [0, 5] e [0, 12] possono essere messi in corrispondenza biunivoca, ma che ciò *non* ci consente tuttavia di dedurre l'uguaglianza (*einander gleich seien*) di queste due molteplicità (*Mengen*) rispetto alla molteplicità (*Vielheit*) dei loro membri (*in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Teile*).[28][29] Infatti, come sostiene Mancosu, potrebbe essere vero che Bolzano avesse accettato 2. e abbandonato 1. per le collezioni di numeri naturali, ma questa tesi non è plausibile in ambito geometrico [2009]. La

[28] Si ricordi (sezione 3.3) che *Menge* e *Vielheit* sono per Bolzano la stessa cosa (ciò che qui abbiamo chiamato *molteplicità*).

[29] Sebestik è d'accordo con Berg, almeno quando si tratta di aritmetica, che per Bolzano la corrispondenza 1-1 diviene il criterio dell'eguaglianza numerica per gli insiemi infiniti. Per questo motivo, Sebestik chiama l'argomento di PU §33 un 'rovesciamento' di PU §21 (Sebestik [2011]).

tesi di Mancuso può essere corroborata se si nota che nella teoria di Bolzano possiamo mettere un limite alla sostituzione delle parti di una collezione con le parti delle parti (si veda sezione 3.3). Bolzano sembra voler dire questo nella PU §33, quando scrive che la collezione dei termini (*Gliedermenge*) delle serie di numeri naturali è la stessa della collezione dei termini delle serie dei loro quadrati, quando sono 'non ancora considerate come *somme* e dunque non scomponibili in molteplicità arbitrarie di parti' (*noch nicht als Somme betrachtet und somit nicht in beliebige Mengen von Teilen zerlegbar*). In altre parole, egli sembra voler dire che la serie dei numeri naturali sia la stessa della serie dei quadrati quando consideriamo come *unità* i numeri stessi (e non le loro parti). Bolzano sembra sostenere che i segmenti siano sempre da considerare come somme e dunque l'argomento non si applica. Dunque, si direbbe che la tesi, secondo cui alla fine Bolzano divenne un buon cantoriano, non può essere accettata.

6. Per concludere

Leggendo le opere di Bolzano, in particolare quelle logiche, è facile dimenticare che Bolzano morì nell'anno in cui è nato Frege. Mentre le sue opere matematiche attirarono l'attenzione di alcuni dei più grandi matematici tedeschi (Weierstrass, Cantor e Dedekind), fino alla fine del diciannovesimo secolo la sua logica è stata per lo più trascurata o incompresa (Sebestik [2007]). Ciò dipese, da un lato, dal fatto che la sua logica era così radicalmente nuova; dall'altro, dalle circostanze in cui Bolzano dovette lavorare e pubblicare. I suoi scritti apparvero spesso in forma anonima e per questo motivo non furono generalmente conosciuti sotto il suo nome. Molte delle idee di Bolzano dovettero aspettare di essere *ri*scoperte e vennero alla luce solo dopo ricerche storico-filosofiche (Morscher [2007]).

Tuttavia, sembra sbagliato dire che Bolzano non ebbe influenza alcuna sullo sviluppo della filosofia e delle scienze. Ad esempio, alcune delle idee logiche più importanti di Bolzano ebbero ampia diffusione tra gli studenti delle scuole secondarie austriache, perché Robert Zimmermann compilò un riassunto della logica di Bolzano in un libro di testo. Come suggerisce Sebestik [2007], persino Wittgenstein potrebbe aver preso ispirazione da tale libro di testo per scrivere il suo *Tractatus*. Due pensatori che furono sicuramente influenzati da Bolzano e che regolarmente lo citavano in modo esplicito, furono Twardowski, che trasmise le idee di Bolzano nella scuola polacca, e Husserl, che elogiò la logica di Bolzano in numerosi suoi lavori (Betti [2006], Sebestik [2007]). Anche Neurath elogiò Bolzano come uno degli antenati della scuola di Vien-

na (Sebestik [2007]). Inoltre, è molto probabile che Frege, almeno nella fase più tarda della sua carriera, avesse letto Bolzano, anche se egli non vi fece mai alcun riferimento esplicito (Mancosu [1996], Sundholm [n.d.]).
Anche se il nome di Bolzano rimase sovente nell'ombra, sembra che lo spirito delle opere di Bolzano trovò comunque il modo di diffondersi. Come dice Sebestik [2007], Bolzano è "il vero fondatore di quel tipo di filosofia analitica il cui nucleo è la logica, e che è impregnato di scienza. La sua logica ha aspetti arcaici, ma egli ha introdotto non solo nuovi concetti, metodi e teorie, nuovi temi e nuovi problemi, ma soprattutto un nuovo spirito che ha pervaso la filosofia da allora."
Concludiamo con alcune brevi note su quegli aspetti del lavoro di Bolzano che, per ragioni di spazio, non abbiamo avuto modo di discutere o abbiamo solo menzionato, ma che non per questo vogliamo considerare meno importanti o interessanti. Per cominciare, abbiamo solo accennato all'epistemologia e alla pedagogia di Bolzano, così come alle sue idee sull'editoria di libri di testo, tutte idee strettamente legate alla sua filosofia della scienza e discusse nelle opere dedicate a tale argomento. Anche della sua metafisica abbiamo considerato appena una piccola parte. Infatti, Bolzano elaborò anche una monadologia che in molti aspetti somiglia a quella di Leibniz, sebbene rielaborata in conformità con la fisica e la chimica del suo tempo.[30] Ad esempio, le monadi di Bolzano, chiamate da lui *atomi*, sono, a differenza di quelle di Leibniz, locate nello spazio, ed egli accetta la legge newtoniana dell'inverso del quadrato della distanza per l'attrazione reciproca degli atomi (cfr. Simons [2015]). Bolzano utilizza le monadi come base della sua fisica, per presentare una soluzione al problema mente-corpo e per difendere la tesi secondo cui l'anima umane esiste eternamente. Per mezzo di quest'ultima tesi, in particolare, egli tentò di consolare l'amica Anna Hoffman per la perdita della figlia.
Sparsa tra le sue opere logiche e RW troviamo anche una ricca teoria etica. Bolzano rifiuta l'imperativo categorico di Kant, e lo sostituisce con il principio utilitaristico della promozione del benessere generale (cfr. Morscher [2007]). Questo principio è anche alla base dei suoi scritti politici. Come lui stesso dichiarò, la questione che più di tutte lo tenne occupato con la massima frequenza, con la massima intensità e con il massimo entusiasmo era: come possiamo eliminare o almeno ridurre in modo più efficace la sofferenza umana e il male nel mondo? Nel BS, la sua opera più importante di filoso-

[30] Per un abbozzo della monadologia di Bolzano, si veda Simons [2015]. Simons descrive la monadologia di Bolzano come "il limite a cui una monadologia può arrivare nel tentativo di render conto dei fenomeni dinamici della fisica classica."

fia sociale e politica, egli scrive che la ragione per cui la condizione umana è così deplorevole è da attribuirsi alle pessime costituzioni civili finora adottate, e si dedica alla questione di come dovrebbe essere il miglior stato possibile (cfr. Morscher [2007]). Bolzano affrontò anche molte questioni di rilevanza pratica nei suoi discorsi edificanti, la cui edizione critica completa è stata pubblicata solo nel 2007 (ER).

RW venne pubblicato nel 1834 ad opera di alcuni allievi di Bolzano, senza alcuna menzione dell'autore e con suo dispiacere, prendendo a riferimento le loro dispense altamente carenti (cfr. Morscher [2007]). Il concetto di religione che presuppone Bolzano è interessante, sebbene problematico da un punto di vista cattolico. Era convinto che una dottrina religiosa fosse giustificata, indipendentemente dalla sua verità, nella misura in cui la credenza in essa fosse moralmente vantaggiosa. Ad esempio, se tutti gli esseri umani siano figli di una sola coppia non è tanto importante per quanto riguarda la sua verità, ma lo è nella misura in cui la sua accettazione spinge a consolidare tra di noi i sentimenti di amore fraterno (Morscher [2007]). Un aspetto particolarmente interessante di RW è che il problema dei miracoli è trattato sulla base della teoria delle probabilità. È stato sottolineato da Morscher che anche le sezioni sulla probabilità nella WL, nonché le sezioni sulla credibilità sulla base della testimonianza, siano da intendersi sullo sfondo della sua riflessione teologica [2007].

Infine, nella sua opera *Che cos'è la filosofia?* (*Was ist Philosophie?*; WP) Bolzano chiarì il suo concetto di filosofia e presentò la sua visione sul compito della filosofia. Per Bolzano, la filosofia non dev'essere circoscritta entro i limiti di una qualche area di conoscenza specifica. Al contrario, qualunque sia il nostro campo d'indagine, nel momento stesso in cui ci chiediamo "perché?", secondo Bolzano stiamo con ciò facendo filosofia (WP; cfr. Morscher [2007]).

Riconoscimenti Un sentito ringraziamento ad Arianna Betti, per gli utili suggerimenti sui contenuti di questo profilo ma soprattutto ed ancor prima per avermi introdotto al pensiero di Bolzano. Vorrei inoltre ringraziare Michele Ginammi per il tempo, lo sforzo e l'infinita pazienza dedicatami nel lavoro di revisione linguistica. Ringrazio infine i due anonimi *referee* per i loro preziosi suggerimenti.

Riferimenti bibliografici

Opere selezionate di Bolzano

[BE] 1804, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* [*Riflessioni su alcuni elementi di geometria elementare*], Karl Barth, Praga.
[BY] 1810, *Beyträge zu einer gegründerteren Darstellung der Mathematik* [*Contributi a un'esposizione più fondata della matematica*], Caspar Widtmann, Praga.
[BG] 1977/1816, *Uiber den Begriff der Größe und die verschiedenen Arten derselben* [*Sul concetto di quantità e dei suoi vari generi*], Bernard Bolzano Gesamtausgabe, Reihe II, Band 5, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Canstatt.
[RB] 1817, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* [*Dimostrazione puramente analitica del teorema che tra due valori qualsiasi, che danno risultato di segno opposto, c'è almeno una radice reale dell'equazione*], Gottlied Haase, Praga.
[ER] 2007/1804-1820, *Erbauungsreden der Studienjahre 1804/1805 - 1819/1820* [*Discorsi edificanti degli anni accademici 1804/1805 - 1819/1820*], E. Morscher, K.F. Strasser, eds., Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt.
[AT] 1827, *Athanasia oder Gründe für die Unsterblichkeit der Seele* [*Athanasia o ragioni per l'immortalità dell'anima*], J.E. v. Seidel, Sulzbach; seconda edizione migliorata e ampliata: 1838, J.E. v. Seidel, Sulzbach.
[BS] 1832, *Von dem besten Staate* [*Dalla migliore stato*], A. Kowalewski, ed., Royal Bohemian Society of the Sciences, Praga.
[WP] 1838, *Was ist Philosophie?* [*Che cos'è la filosofia?*], M.J. Fesl, ed., W. Braumüller, Vienna.
[EG] 1975/1833-1841, *Einleitung zur Größenlehre* [*Introduzione alla dottrina delle grandezze*], J. Berg, ed., Bernard Bolzano Gesamtausgabe, Reihe II, band 7, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Canstatt.
[EB] 1975/1833-1841, *Erste Begriffe der allgemeinen Größenlehre* [*Primi concetti della dottrina delle grandezze*], J. Berg, ed., Bernard Bolzano Gesamtausgabe, Reihe II, band 7, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Canstatt.
[ML] 1975/1833-1841, *Von der mathematischen Lehrart* [*Del metodo matematico*], J. Berg, ed., Bernard Bolzano Gesamtausgabe, Reihe II, band 7, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Canstatt.

[RZ] 1976/1833-1841, *Reine Zahlenlehre* [*Pura dottrina dei numeri*], J. Berg, ed., Bernard Bolzano Gesamtausgabe, Reihe II, band 8, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Canstatt.
[RW] 1994/1834, *Lehrbuch der Religionswissenschaft. Ein abdruck der Vorlesungshefte eines ehemaligen Religionslehrers an einer katholishen Universität, von einigen seiner Schüler gesammelt und herausgegeben* [*Manuale di scienza della religione. Una pubblicazione dei quaderni delle lezioni di un ex docente di religione in un'università cattolica, raccolti e curati da alcuni suoi studenti*], J. Louzil, ed., Bernard Bolzano Gesamtausgabe, Reihe I, band 6-8, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Canstatt.
[WL] 1969/1837, *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter* [*Dottrina della scienza. Tentativo di un'esposizione dettagliata e in massima parte nuova della logica con costante riferimento a coloro che se ne sono finora occupati*], J. Berg, E. Winter (ed.), Bernard Bolzano Gesamtausgabe, Reihe I, Band 11-14, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Canstatt.
[PU] 1851, *Paradoxien des Unendlichen* [*Paradossi dell'infinito*], F. Prihonsky, ed., C.H. Reklam sen., Leipzig.

TRADUZIONI ITALIANE

(PU) 1965, *Paradossi dell'infinito*, Milano: Feltrinelli. Traduzione di Carla Sborgi, con prefazione, appendice e note di Franco Voltaggio.
(PU) 1965, *Paradossi dell'infinito*, Milano: Silva. Introduzione e traduzione di Alberto Conte; nuova edizione Torino, Bollati Boringhieri, 2003.
(ML) 1985, *Del metodo matematico*, Torino: Boringhieri. Traduzione di Lorenzo Giotti, introduzione di Carlo Cellucci; nuova edizione 2004.
(WP) 2006, *Che cos'è la filosofia?*, *in* Il concetto della filosofia in Bernard Bolzano, L. Fossati, ed., Milano: Isu Cattolica. Traduzione di L. Fossati.
(WL) 2014, *Dottrina fondamentale dalla Dottrina della scienza (§§1-45)*, Milano: Bompiani. Introduzione e traduzione di Gianni Rigamonti. Note e apparati di Lorenzo Fossati.

OPERE DI LETTERATURA SECONDARIA CITATE

Bar-Hillel, Y. 1967. «Bernard Bolzano.» In P. Edwards (Ed.), *The encyclopedia of philosophy 1* (p. 337-338). London: Collier Macmillan.

Berg, J. 1977. «Bolzano's contributions to logic and philosophy of mathematics.» In J. Barwise, D. Kaplan, H. Keisler, P. Suppes, A. Troelstra (Eds.), *Logic colloquium 76* (Vol. 87, p. 147-172). Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company.

Berg, J. 1990. «Zur logischen und mathematischen Ontologie bei Bolzano.» In D. Spalt (Ed.), *Rechnen mit dem unendlichen: Beiträge zur entwicklung eines kontroversen gegenstandes.* Basel: Springer Basel AG.

Berg, J. 1992. *Ontology without ultrafilters and possible worlds: An examination of Bolzano's ontology* (E. Morscher O. Neumaier, Eds.). Sankt Augustin: Academia Verlag.

Berg, J. 1994. «The ontological foundations of Bolzano's philosophy of mathematics.» In D. Prawitz D. Westerstahl (Eds.), *Logic and philosophy of science in uppsala: Papers from the 9th international congress of logic, methodology and philosophy of science* (p. 265-272). Dordrecht: Springer Science and Business Media, b.v.

Betti, A. 2001. *Logica, verità e tempo nella filosofia austro-polacca* (Unpublished doctoral dissertation). Università degli Studi di Genova.

Betti, A. 2006. «*De Veritate*: Another chapter. the Bolzano-Leśniewski connection.» In J. J. J. et. al. (Ed.), *The lvov-warsaw school - the new generation.* Amsterdam and New York: Rodopi.

Betti, A. 2010. «Explanation in metaphysics and Bolzano's theory of ground and consequence.» *Logique et Analyse*, *211*, 281-316.

Betti, A. 2012. «Bolzano's universe: Metaphysics, logic, and truth.» In L. Haaparanta H. Koskinen (Eds.), *Categories of being: Essays on metaphysics and logic.* Oxford: Oxford University Press.

Beyer, C. 2001. «Logik, Semantik und Ontologie: Neuere Literatur zu Bolzano.» *Philosophische Rundschau*, *48*, 231-262.

Cantù, P. 2003. «Bernard Bolzano e le rappresentazioni anoggettuali.» In P. Valore (Ed.), *Forma dat esse rei* (p. 125-162). Milano: Led.

Cantù, P. 2006. «Bolzano et les propositions en soi: une théorie objective des vérités.» In J. Benoist (Ed.), *Propositions et états de choses.* Paris: Vrin.

Cantù, P. 2014. «Bolzano versus Kant: Mathematics as a Scientia Universalis.» In A. Reboul (Ed.), *Mind, values and metaphysics, philosophical papers dedicated to kevin mulligan, vol. i* (p. 295 - 316). Cham: Springer International Publishing.

Casari, E. 1985. «L'universo logico Bolzaniano.» *Rivista di Filosofia*, *76*(3).

Casari, E. 1987. «An interpretation of some ontological and semantical notions in *Bolzano's Logic*.» Bolzano's Wissenschaftslehre 1837-1987, *International Workshop Firenze 1987*, 55-105.

Centrone, S. 2012. «Strenge Beweise und das Verbot der metbasis eis llo génos.» *History and Philosophy of Logic*, *33*(1), 1-31.

Correia, F., Schnieder, B. 2012. «Grounding: an opinionated introduction.» In F. Correia B. Schnieder (Eds.), *Metaphysical grounding: Understanding the structure of reality* (p. 1-36). Cambridge: Cambridge University Press.

Dedekind, R. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: F. Vieweg.

de Jong, W. 2001. «Bernard Bolzano, analyticity, and the Aristotelian model of science.» *Kant-Studien*, *92. Jahrg.*, 328-349.

de Jong, W., Betti, A. 2010. «The Classical Model of Science: a millennia-old model of scientific rationality.» *Synthese*, *174*, 185-203.

Detlefsen, M. 1988. «Fregean hierarchies and mathematical explanation.» *International Studies in the Philosophy of Science*, *3*, 97-116.

Føllesdal, D. 2004. «Bolzano's bleibende Leistungen.» In A. Chrudzimski W. Huemer (Eds.), *Phenomenology and analysis: Essays in Central European philosophy.* Heusenstamm nr Frankfurt: Ontos Verlag.

Fossati, L. 2014. «Vita e opere di Bernard Bolzano.» In L. Fossati G. Rigamonti (Eds.), *Bernard bolzano: Dottrina fondamentale. dalla dottrina della scienza* §§ *1-45* (p. 29-44). Milano: Bompiani.

Frege, G., Hilbert, D. 1980. *Philosophical and mathematical correspondence.* Oxford: Blackwell Publishers.

Künne, W. 1997. «Propositions in Bolzano and Frege.» *Grazer Philosophische Studien*, *53*, 203-240.

Kurka, P., Trlifajov, K. n.d.. «On dynamical continuum of Bolzano and Cauchy.»
(URL = www.cts.cuni.cz/ kurka/publ.html)

Lakatos, I. 1980. «Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history of mathematics.» In G. C. J. Worall (Ed.), *Mathematics, science, and epistemology.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lapointe, S. 2011. *Bolzano's theoretical philosophy: An introduction*. New York: Palgrave MacMillan.

Laugwitz, D. 1965. «Bemerkungen zu Bolzanos Größenlehre.» *Archive for History of Exact Sciences*, *2*(5), 398-409.

Mancosu, P. 1996. *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. New York: Oxford University Press.

Mancosu, P. 1999. «Bolzano and Cournot on mathematical explanation.» *Revue d'Histore des Sciences*, *52*(3-4).

Mancosu, P. 2008. «Explanation in mathematics.» *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Mancosu, P. 2009. «Measuring the size of infinite collections of natural numbers: Was Cantor's theory of infinite number inevitable?» *The Review of Symbolic Logic*, *2*(4).

Mariani, M. 2011. «Bolzano e Cantor.» In S. Besoli, L. Guidetti, V. Raspa (Eds.), *Bernard bolzano a la tradizione filosofica* (Vol. 2). Macerata: Quodlibet.

Morscher, E. 2007. «Bernard Bolzano.» *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

O'Connor, J., Robertson, E. 2005. *Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano.* (URL = http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano.html)

Roski, S. 2014. *Bolzano's notion of grounding and the Classical Model of Science* (Unpublished doctoral dissertation). Vrije Universiteit Amsterdam.

Rumberg, A. 2013. «Bolzano's concept of grounding *abfolge* against the background of normal proofs.» *The Review of Symbolic Logic*, *6*(03).

Rusnock, P. 2000. *Bolzano's philosophy and the emergence of modern mathematcs*. Amsterdam and Atlanta: Editions Rodopi.

Rusnock, P. 2012. «Remarks on Bolzano's conception of necessary truth.» *British Journal for the History of Philosophy*, *20*(4), 1-21.

Russ, S. 2004. *The mathematical works of Bernard Bolzano*. Oxford: Oxford University Press.

Schnieder, B. 2007. «Mere possibilities: a Bolzanian approach to non-actual objects.» *Journal of the History of Philosophy*, *45*(4), 525-550.

Sebestik, J. 1992. *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Sebestik, J. 2007. «Bolzano's logic.» *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Sebestik, J. 2011. «Bolzano e la matematica.» In S. Besoli, L. Guidetti, V. Raspa (Eds.), *Bernard bolzano a la tradizione filosofica* (Vol. 2). Macerata: Quodlibet.

Siebel, M. 2002. «Bolzano's concept of consequence.» *The Monist*, *85*(2), 580-599.

Simons, P. 1997. «Bolzano on collections.» *Grazer Philosophische Studien*, *53*, 87-108.

Simons, P. 1999. «Bolzano über Zahlen.» In E. Morscher (Ed.), *Bernard Bolzano's geistiges Erbe für das 21. Jahrhundert (Beiträge zur Bolzano-Forschung 11.* St. Augustin: Academia.

Simons, P. 2015. «Bolzano's monadology.» *The British Journal for the History of Philosophy*, *23*(6).

Spalt, D. 1991. «Bolzanos Lehre von den meßbaren Zahlen 1830-1989.» *Archive for History of the Exact Sciences*, *42*(1), 15-70.

Sundholm, G. n.d.. «When, and why, did Frege read Bolzano?»

Tatzel, A. 2002. «Bolzano's theory of ground and consequence.» *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *43*(1), 1-25.

Textor, M. 2013. «Bolzano on the source of necessity: A reply to Rusnock.» *British Journal for the History of Philosophy*, *21*(2), 381-392.

Waldegg, G. 2001. «Ontological convictions and epistemological obstacles in Bolzano's elementary geometry.» *Science and Education*, *10*, 409-418.