APhEx 25, 2022 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 19/01/2021
Accettato il: 01/03/2022
Redattore: Vera Tripodi

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK
N° 25, 2022

P R O F I L I

# Per Martin-Löf

Michele Contente

*Per Martin-Löf è uno dei più importanti logici viventi. Il presente profilo si propone di illustrare in maniera accessibile i suoi principali lavori, dedicando particolare attenzione alla loro rilevanza filosofica. Dopo una breve esposizione della sua biografia intellettuale, esamineremo i suoi principali contributi a diverse aree della logica e della filosofia. In particolare, ci concentreremo sul suo contributo più importante, l'introduzione della teoria intuizionista dei tipi, e analizzeremo il suo lavoro in teoria della dimostrazione, fondamenti della matematica costruttiva e filosofia della logica.*

Indice


## 1. Cenni Biografici

Per Erik Rutger Martin-Löf nasce a Stoccolma l'8 maggio 1942. La sua carriera accademica inizia con una tesi di teoria della probabilità sotto la direzione di Ulf Grenander. Questi lo metterà in contatto con il grande matematico sovietico Andrej Nikolaevič Kolmogorov, sotto la cui guida Martin-Löf studierà a Mosca nel biennio 1964-65. Proprio durante il soggiorno russo Martin-Löf inizierà ad interessarsi di logica e fondamenti della matematica. I primi lavori sulla definizione di *randomness* mostrano chiaramente l'influenza di Kolmogorov e

della sua scuola. Il contributo di Martin-Löf in questo ambito è stato estremamente originale, come vedremo di seguito, al punto che oggi questi suoi lavori giovanili vengono considerati studi pionieristici e fondamentali. Lo sviluppo notevole delle ricerche su questo tema nei decenni successivi ha confermato la fecondità dell'approccio inaugurato da Martin-Löf.
L'influenza dell'ambiente matematico sovietico si manifesta soprattutto nella tesi di dottorato *Notes on Constructive Mathematics*, che viene pubblicata più tardi nel 1970. É la prima opera in cui Martin-Löf si concentra esplicitamente su questioni legate alla *matematica costruttiva*[1], che diventerà poi la sua area principale di ricerca.
L'esperienza russa è seguita qualche anno dopo, più precisamente nell'anno accademico 1968-1969, da un soggiorno negli Stati Uniti. In particolare, Martin-Löf trascorre un periodo a Chicago dove ha l'occasione di entrare in contatto con alcuni importanti logici, tra cui William Howard e William W. Tait. Gli incontri e le conversazioni di questo periodo attirano l'interesse di Martin-Löf verso la teoria della dimostrazione e la corrispondenza tra formule e tipi, poi nota come *Isomorfismo Curry-Howard*. In questo contesto, inizia a prendere forma il quadro concettuale e tecnico da cui avrà origine la *teoria intuizionista dei tipi*.
Gli anni immediatamente successivi costituiscono una fase di intensa creatività e vengono pubblicati molti dei lavori che sarebbero poi divenuti classici. Martin-Löf, insieme al suo collega all'Università di Stoccolma, Dag Prawitz, e a Jean-Yves Girard, oltre ai già menzionati Howard e Tait, diventa una delle figure di spicco della rinascita della teoria della dimostrazione e dei fondamenti della matematica[2]. Verso la fine degli anni '70 e per tutti gli anni '80 Martin-Löf approfondisce i fondamenti filosofici della teoria dei tipi e propone nuove versioni del sistema, che ne rafforzano il legame con la teoria dei linguaggi di programmazione e con l'informatica teorica in generale. In questi anni tiene diversi cicli di lezioni in Italia: Padova (1981), Siena (1983) e Firenze (1987). In particolare, dalle lezioni padovane e da quelle senesi nasceranno, rispettivamente, una monografia (Martin-Löf, 1984) e un articolo (Martin-Löf, 1996), che poi sarebbero diventati tra i suoi lavori più celebri. Proprio in occasione di questi soggiorni in Italia ha modo di conoscere Giovanni Sambin, stringendo con lui un forte legame di amicizia e collaborazione, da cui nascerà un importante progetto di matematica costruttiva noto come *topologia formale* (Sambin, 1987). Nel decennio successivo Martin-Löf continua a lavorare sulla teoria dei tipi, che ormai si è largamente diffusa anche tra gli informatici, ispirando nuove linee di ricerca al confine tra logica e computazione, e approfondisce la riflessione sulla filosofia della logica e la teoria del significato. Infatti, come avremo modo di vedere, la riflessione filosofica di Martin-Löf, pur partendo sempre dalle nozioni fondamentali della teoria dei tipi, si estende fino a comprendere tematiche classiche della tradizione filosofica, con un sottotesto di rimandi e letture molto vario e non sempre pienamente esplicitato.
Martin-Löf ha insegnato all'Università di Stoccolma fino al 2009, presso la quale ora è Emerito. Tra i numerosi riconoscimenti vanno ricordati: l'elezione all'Academia Europea (1989) e alla Royal Swedish Academy of Science (1990) e soprattutto il Rolf Schock Prize for Logic and Philosophy (2020), quest'ultimo condiviso con Dag Prawitz.

### 1.1 Opere dell'autore

Non è semplice compilare una bibliografia completa delle opere di Martin-Löf sia perchè in

[1] Si veda (Crosilla, 2016) per un'introduzione generale alle varie scuole di matematica costruttiva.

[2] A tal proposito è emblematico il volume (Fenstad, 1971).

molti casi vi è una sensibile differenza cronologica tra circolazione e effettiva pubblicazione, sia perchè molti lavori influenti in realtà non sono mai stati pubblicati e sono circolati solo privatamente nella comunità di studiosi. Di seguito riportiamo sia le opere pubblicate sia alcuni lavori non pubblicati, che comunque hanno conosciuto una certa diffusione. Alcune voci bibliografiche iniziano con una doppia data: la prima è quella di pubblicazione, mentre la seconda quella di distribuzione e circolazione.

**Opere pubblicate**:

- (1965). The continuity theorem on a locally compact group, *Theory of Probability and its Applications*, 10(2): 367–371.
- (1965). Probability theory on discrete semigroups, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 4 78—102.
- (1966).The definition of random sequences, *Information and Control*, 9(6):602-619.
- (1969) Algorithms and Randomness, *Review of the International Statistical Institute*, 37:3, 265-272.
- (1970) On the notion of randomness. In *Intuitionism and Proof Theory. Proceedings of the Summer Conference at Buffalo N.Y. 1968*, eds. A.Kino, J.Myhill and R.E.Vesley, 73-78. Amsterdam-London: North-Holland.
- (1970) (1968) *Notes on Constructive Mathematics*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- (1971a) (1970a). Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions. In *Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposium*, ed.J.E. Fenstad, 179–216. Amsterdam: North-Holland.
- (1971b) (1970b). Hauptsatz for the intuitionistic theory of species. In *Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposium*, ed.J.E.Fenstad, 217–233. Amsterdam: North-Holland.
- (1971c) Complexity Oscillations in Infinite Binary Sequences. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 19 225–230.
- (1972) (1969). Infinite terms and a system of natural deduction. *Compositio Mathematica* 24: 93–103.
- (1973) (1970c). Hauptsatz for intuitionistic simple type theory. In *Proceedings of the 4th international congress for logic, methodology and philosophy of science*, eds. P. Suppes, L. Henkin and A. Joja, 279–290. Amsterdam: North-Holland.
- (1974) The Notion of Redundancy and Its Use as a Quantitative Measure of the Discrepancy between a Statistical Hypothesis and a Set of Observational Data. *Scandinavian Journal of Statistics*, 1:3-18.

- (1975)(1973a). An intuitionistic theory of types: Predicative part. In *Logic colloquium'73*, eds. H.E. Rose and J. Shepherdson, 73–118. Amsterdam: North-Holland.

- (1975) (1973b). About Models for Intuitionistic Type Theories and the Notion of Definitional Equality. In *Proceedings of the 3rd Scandinavian Logic Symposium*, ed.S.Kanger, 1975, 81-109.

- (1977). Exact tests, confidence regions and estimates. *Synthese*, 36:195-206.

- (1982) (1979). Constructive mathematics and computer programming. In *Proceedings of the 6th international congress for logic, methodology and philosophy of science*, L.J. Cohen, J. Los, H. Pfeiffer and K.-P. Podewski, 153–175. Amsterdam: North-Holland.

- (1984) (1980). *Intuitionistic type theory. Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980*. Napoli: Bibliopolis.

- (1985). Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof. *Synthese*, 73:407-420.

- (1986). Unifying Scott's theory of domains for denotational semantics and intuitionistic type theory (Abstract), In *Atti del Congresso "Logica e Filosofia della Scienza oggi" San Gimignano, 7-11 December 1983*, eds. V.M.Abrusci, E.Casari. Bologna: CLUEB.

- (1990). Mathematics of infinity. In *Colog 88*, ed.P.Martin-Löf and G.Mints, 146–197. Berlin: Springer.

- (1991). A path from logic to metaphysics. In *Atti del Congresso "Nuovi Problemi della Logica e della Filosofia della Scienza", Viareggio, 8–13 gennaio, 1990*, ed. G. Corsi and G. Sambin, 141–149. Bologna: CLUEB.

- (1994) Analytic and synthetic judgements in type theory. In *Kant and contemporary epistemology*, ed. P.Parrini, 87–99. Dordrecht: Kluwer.

- (1995) Verificationism then and now. In *The foundational debate: Complexity and constructivity in mathematics and physics*, eds. W.DePauli-Schimanovich et al., 187–196. Dordrecht: Kluwer.

  (poi ripubblicato in *Judgement and the Epistemic Foundationof Logic*, ed. M.Van der Schaar, Dordrecht: Springer, 2013).

- (1996) (1983) On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws. *Nordic Journalof Philosophical Logic*, 1(1): 11–60.

- (1997) (1970) A construction of the provable wellorderings of the theory of species. In *Logic, Meaning and Computation*, eds. A. Anthony Anderson and M. Zeleny, 343–352. Dodrecht: Kluwer.

- (1998a) Truth and knowability: On the principles C and K of Michael Dummett. In *Truth in Mathematics*, eds. H.G. Dales and G. Oliveri, 105–114. Oxford: Clarendon Press.

- (1998b) (1972) An intuitionistic theory of types. In *Twenty-Five Years of Constructive Type Theory* , eds. G. Sambin and J.J. Smith, 127–172. Oxford: Clarendon Press.

- (2008) The Hilbert-Brouwer controversy resolved?, In *One Hundred Year of Intuitionism (1907–2007)*, eds.M. van Atten, P. Boldini, M. Bourdeau and G Heinzmann, 243–256. Basel: Birkhäuser.

- (2009) (2006) 100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it?, In *Logicism, Intuitionism and Formalism.What has become of them?*, eds .S.Lindström, E.Palmgren, K.Segerberg and Stoltenberg-Hansen, 209-219. Dordrecht: Springer.

**Note e preprint non pubblicati**

- (1971). A theory of types.

- (1971b). On the strength of intuitionistic reasoning.

- (1975) (with P.Hancock). Syntax and semantics of the language of primitive recursive functions.

- (1983) Notes on the domain interpretation of type theory.

- (1987) The Logic of Judgements (Edimburgo, 22 febbraio 1987).

- (1987) Philosophical Implications of Type Theory (lezioni Firenze, 15 marzo- 15 maggio 1987).

- (1992) Substitution Calculus (lezioni Göteborg).

## 2. I primi lavori

Il periodo di ricerca svolto a Mosca sotto la supervisione di Kolmogorov porta Martin-Löf ad interessarsi di logica matematica e in particolare del problema della definizione formale del concetto di sequenza casuale. Importanti passi avanti in questa direzione erano stati fatti dallo stesso Kolmogorov con la definizione della complessità di un oggetto come la lunghezza del più piccolo programma che produce una descrizione di tale oggetto come output. Il problema di caratterizzare formalmente la casualità è particolarmente complicato perchè abbiamo diverse intuizioni e non tutte necessariamente convergenti. Consideriamo il lancio di una monetina (possibilmente non truccata!) e fissiamo che testa è uguale a 1 e croce 0. Allora ripetuti lanci produrranno una stringa binaria di 0 e 1. Abbiamo in generale un criterio per fissare quando una sequenza binaria $s$ è casuale?
Consideriamo tre sequenze binarie:

- 000000000

- 101110110
- 001010000

E chiamiamole, rispettivamente, $s_1$, $s_2$ e $s_3$. Intuitivamente, la prima ha una struttura molto più semplice delle altre, che sembrano essere state generate in una maniera più casuale. Tuttavia, stando all'assiomatizzazione della probabilità data da Kolmogorov le tre sequenze hanno lo stesso valore di probabilità, cioè $2^{-9}$ (infatti 9 è la misura della lunghezza delle sequenze considerate). Il problema, individuato dallo stesso Kolmogorov, è che la definizione classica di probabilità non si preoccupa di distinguere tra elementi *random* e *non random*. Tornando alla domanda precedente, ci sono diverse possibili proposte volte a determinare un criterio di casualità.

Una prima proposta consiste nell'evidenziare come per alcune sequenze si può riconoscere più o meno agilmente un pattern e quindi di conseguenza possiamo fornirne una descrizione sintetica. Altre, invece, sembrano essere refrattarie ad ogni caratterizzazione di tale tipo. Una sequenza *random*, intuitivamente, è una che non presenta un pattern riconoscibile e che quindi ha una complessità descrittiva pari almeno alla sua lunghezza. Questo approccio, se opportunamente rielaborato, è quello che prosegue nella maniera più fedele l'impostazione di Kolmogorov. Un'altra intuizione collegata alla casualità di una sequenza è l'esibire un comportamento non predicibile: posso conoscere i risultati dei primi $m$ lanci e non riuscire a prevedere il successivo. Quindi l'idea di casualità è strettamente connessa a quella di impredicibilità. L'approccio scelto da Martin-Löf (Martin-Löf, 1966) consiste nell'identificare le sequenze casuali con le sequenze *tipiche*. Una sequenza tipica, dove 'tipico' è da intendersi nel senso di ordinario, non speciale, è una sequenza che non gode di particolari proprietà caratteristiche. Non è possibile individuare una proprietà che caratterizzi il pattern della sequenza e che quindi porti a una sua definizione sintetica o a una predizione del suo comportamento. Queste proprietà caratteristiche vengono chiamate proprietà *effettivamente rare*. Se le leggi probabilistiche usuali (ad es., legge dei grandi numeri) possono essere viste come insiemi di misura 1, le proprietà rare danno vita a insiemi di misura nulla.

La restrizione a proprietà *effettivamente date* corrisponde formalmente al fatto che restringiamo la nostra attenzione a insiemi *ricorsivamente enumerabili*. Un insieme $X$ è ricorsivamente enumerabile (r.e.) se abbiamo una funzione ricorsiva (cioè un algoritmo) che genera tutti e soli gli elementi di $X$. La restrizione a metodi effettivi può essere considerata un'influenza della scuola di matematica ricorsiva russa, che avremo modo di approfondire in seguito, ed è probabilmente la prima testimonianza di un interesse da parte di Martin-Löf per tematiche nell'alveo della logica matematica. Una sequenza tipica dovrebbe soddisfare tutte le leggi probabilistiche e quindi sarebbe allettante concludere subito che una sequenza è casuale se appartiene a tutti gli insiemi di misura 1. Si dimostra facilmente che questa definizione porta a risultati paradossali. Martin-Löf riesce ad aggirare questa difficoltà ricorrendo all'idea di *test*, derivata dalla statistica [3]. Una sequenza tipica o casuale è una sequenza che passa ogni test statistico. Un test è definito considerando una sequenza di aperti $V_i$ effettivamente dati tali che

[3]Martin-Löf ha avuto un certo interesse per la statistica e i suoi fondamenti, come si evince dalla bibliografia riportata in precedenza. Sono articoli che risalgono principalmente agli anni '70 e che non prenderemo in esame nel profilo. Inoltre, l'interesse per la statistica è condiviso con il fratello maggiore Anders Martin-Löf, che ha insegnato a lungo a Uppsala e a Stoccolma, e ha lavorato proprio in quest'area, anche se con maggiore attenzione a problematiche di natura applicativa.

la misura della loro intersezione è nulla, cioè $\mu(\bigcap_i V_i) = 0$. Una sequenza $s$ *supera* il test se $s \notin \bigcap_i V_i$. Se $s$ passa *ogni* test di questa forma, allora $s$ è random.
Questa caratterizzazione della casualità è stata poi chiamata *Martin-Löf Randomness* ed è difficile sovrastimarne l'importanza. Sebbene il contributo di Martin-Löf sia essenzialmente tutto in un singolo articolo giovanile e non abbia più affrontato questi temi, esso viene generalmente riconosciuto come un lavoro fondamentale, come si può vedere consultando alcune moderne introduzioni alla *randomness* quali (Downey and Hirschfeldt, 2010) e (Nies, 2009).
Dopo il lavoro sulla randomness, Martin-Löf concentra la sua attenzione sulla matematica costruttiva. I risultati e le riflessioni di questa fase confluiranno nella sua tesi di dottorato *Notes on Constructive Mathematics* (Martin-Löf, 1970). Sebbene risulti scritta sotto la direzione di Kolmogorov, in realtà sono delle note per alcune lezioni che Martin-Löf tiene a Stoccolma e Aarhus nel biennio '66-68. Questo lavoro è un'analisi della matematica costruttiva così come concepita e praticata da Andrej Andreevič Markov[4] e dalla sua scuola: questo approccio è noto come *matematica costruttiva ricorsiva*. La matematica ricorsiva inizia di fatto con l'analisi e la definizione precisa dell'idea di ricorsività: infatti già nel celebre articolo di Turing (Turing, 1937) vi è una sezione in cui risultati classici dell'analisi sono riformulati in termini di reali calcolabili. La matematica ricorsiva costruttiva si differenzia dalla matematica ricorsiva classica per il fatto che vengono accettate solo inferenze intuizionisticamente ammissibili. Un principio accettato da Markov e non presente nelle forme tradizionali di intuizionismo è il seguente:

$$\text{(MP)}\ \forall x(P(x) \vee \neg P(x)) \wedge \neg\neg\exists x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

Questo principio, noto appunto come *Principio di Markov*, asserisce che, dato un predicato *decidibile P*, se attraverso qualche forma di ragionamento indiretto sappiamo che è impossibile che non ci sia un $x$ tale che $P(x)$, allora possiamo concludere che l'esecuzione dell'algoritmo prima o poi produrrà esattamente un tale $x$. La decidibilità del predicato considerato assicura appunto che abbiamo una procedura per testarlo. In maniera più sintetica, se è impossibile che la computazione eseguita da una macchina di Turing $T$ non termini, allora $T$ si arresta per un certo valore, cioè produce un output. L'obiezione intuizionista a (MP) è che da una verifica indiretta della doppia negazione di un esistenziale, non sempre possiamo estrarre un *testimone*, cioè un termine $t$ concreto per cui il predicato valga e l'esistenziale sia dunque verificato.
In generale, oltre a (MP), i principi alla base dell'approccio di Markov sono i seguenti:

- si assumono soltanto *oggetti* costruttivi, cioè configurazioni finite di segni come possono essere le parole in un alfabeto finito;
- si accetta soltanto l'infinito potenziale.
- la nozione di algoritmo deve essere definita in maniera formalmente rigorosa. Markov diede una sua analisi del concetto, ma essa è estensionalmente equivalente ad altre caratterizzazioni più note, come ad esempio quella fornita dalle macchine di Turing.

[4] Il riferimento è ad A.A.Markov (1903-1979), figlio omonimo di A.A.Markov (1856-1922). Anche Markov padre è stato un matematico e ha dato importanti contributi a diverse aree della disciplina. Ad esempio, a lui dobbiamo la definizione di *catena di Markov*.

Le *Notes on Constructive Mathematics* si sviluppano intorno a questo nucleo di idee e presentano un'esposizione di tale approccio ad alcune aree della matematica: analisi elementare, ordinali e insiemi di Borel, teoria della misura. Nell'introduzione Martin-Löf delinea in che modo è da intendersi l'aggettivo "costruttivo" in quest'opera e di fatto riprende i principi enunciati da Markov. Un oggetto costruttivo è una configurazione finita di segni, dove questi ultimi sono atomici e quindi non ulteriormente analizzabili. Considerare soltanto oggetti costruttivi comporta alcune conseguenze interessanti: dato che abbiamo un'analisi di cosa significa eseguire operazioni su configurazioni finite di oggetti e quindi una definizione precisa di algoritmo, ne segue che le computazioni stesse sono oggetti costruttivi. Inoltre la loro natura finitaria implica che siano codificabili tramite numeri naturali, sebbene da un punto di vista pratico sia più comodo lavorare con la nozione generale di oggetto costruttivo, evitando così i dettagli formali della codifica. Tuttavia resta l'importanza epistemologica del fatto che le varie nozioni utilizzate nelle *Notes* siano in ultima analisi tutte riducibili ai numeri naturali e quindi acquisiscono un particolare tipo di evidenza sia per quanto concerne la loro natura sia in relazione alle operazioni che possono essere eseguite su di esse. Infatti, Martin-Löf osserva come gli oggetti costruttivi abbiano uno statuto epistemologico privilegiato in quanto sono completamente comunicabili. Essendo configurazioni finite di segni, essi sono esplicitamente definibili e possono sempre essere rappresentati concretamente.
L'accettazione dell'infinito potenziale, già presente implicitamente nel modo in cui vengono presentati i naturali, ci assicura che possiamo ammettere un certo livello di astrazione per quanto riguarda le operazioni ammissibili: ad esempio, non dobbiamo preoccuparci di eventuali limitazioni di memoria oppure di altre limitazioni fisiche concernenti la rappresentazione concreta dei segni. La discussione di Martin-Löf è interamente concentrata sull'accesso privilegiato che abbiamo alle informazioni su tali oggetti, mentre viene esplicitamente osservato che se questi siano da intendersi come costruzioni mentali oppure come oggetti concreti dotati di esistenza spaziotemporale non è una questione particolarmente importante dal punto di vista delle costruzioni ammissibili e delle regole giustificabili. In ogni caso, Martin-Löf sembra preferire la seconda alternativa per cui gli oggetti costruttivi possono essere visti come "quasi-concreti", in quanto un certo grado di astrazione è comunque accettato, ed è sempre disponibile una loro rappresentazione esplicita e completa.
Probabilmente una certa ritrosia su questo punto si spiega anche con il fatto che, a questo stadio della sua riflessione, Martin-Löf non ha ancora una posizione ben definita sulla variante più celebre di costruttivismo, cioè l'intuizionismo brouweriano. Brouwer riteneva che l'attività matematica avesse per oggetto costruzioni mentali e includeva tra gli oggetti matematici ammissibili oggetti quali le sequenze di scelta, che sicuramente non rientrano nell'idea di costruttività sopra esposta. Inoltre contrastava le prove informali intese come costruzioni mentali con le prove formali, cioè le derivazioni sintattiche all'interno di un sistema formale. Nell'introduzione, Martin-Löf sottolinea come le prove formali siano sicuramente da annoverarsi tra gli oggetti costruttivi, infatti non sono altro che stringhe finite di segni la cui generazione è sottoposta a regole esplicitamente date. Ma, aggiunge, ciò sicuramente non vale per le dimostrazioni informali. Quale sia esattamente il rapporto tra le dimostrazioni come oggetti formali finiti e le dimostrazioni informali non viene detto in queste note, ma possiamo notare che costituirà uno dei temi centrali della riflessione di Martin-Löf e sarà importante soprattutto nello sviluppo della teoria intuizionista dei tipi.
Alla luce di quanto detto finora, sembra corretto sostenere che le *Notes* presentano una concezione di costruttività che deriva principalmente da Markov e dalla sua scuola e, limitatamente

ad alcuni aspetti, anche dal finitismo hilbertiano, mentre è decisamente minore l'influenza di Brouwer e Heyting. Solo nella trattazione degli ordinali costruttivi vi è una ripresa esplicita dell'opera di Brouwer.
In generale, una prima differenziazione tra modi di concepire che cosa è costruttivo può essere articolata ricorrendo alla distinzione tra costruttività rispetto agli oggetti e costruttività rispetto alle prove. Nel primo caso, gli oggetti matematici così come le operazioni su di essi hanno un carattere finitario e quindi concretamente rappresentabile in una forma completa. La matematica finitaria hilbertiana può essere citata come esempio di tale concezione. Nel secondo caso, la costruttività riguarda i metodi di prova accettati e quindi le regole di inferenza ritenute legittime. Qui l'esempio più evidente è l'intuizionismo brouweriano, che ammette anche costruzioni astratte di natura non finitaria. Tuttavia, queste due idee di costruttività non vanno intese come mutualmente esclusive ed è proprio l'approccio di Markov, e di conseguenza quello di Martin-Löf, a costituire un esempio di come possono presentarsi in forma combinata. Fin quando discutiamo di predicati decidibili, la scelta della logica è una questione secondaria e non c'è una differenza sensibile tra logica classica e intuizionista per quanto concerne il significato degli enunciati contenenti tali predicati. Tuttavia, ci sono differenze nei metodi di prova ritenuti legittimi e ciò fa sì che validità costruttiva e validità classica non coincidano. Tuttavia esistono diverse strategie che ci permettono di recuperare il contenuto costruttivo dei teoremi classici e quindi, almeno per alcune classi di enunciati, la validità classica può essere compresa costruttivamente.
Nelle *Notes* Martin-Löf fa riferimento alla *no-counterexample interpretation* di Georg Kreisel come metodo per ridurre parzialmente la nozione di validità classica alla sua controparte costruttiva (e ricorsiva). Non possiamo entrare nei dettagli dell'interpretazione, ma bisogna osservare che essenzialmente essa porta da una formula in forma prenessa

$$\forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_n \exists y_n A(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

a una formula della forma

$$\forall f_1 \dots \forall f_k \exists n_1 \dots \exists n_k A(f_1, n_1, \dots, f_k(n_1, \dots, n_{k-1}), n_k)$$

dove le $f_1, \dots, f_k$ sono da intendersi come funzioni sui naturali. L'osservazione di Martin-Löf è che possiamo codificare tali funzioni in un'unica sequenza infinita di naturali e i naturali $n_1, \dots, n_k$ in un unico naturale. Il risultato è un enunciato della forma $\Pi^1_1$, cioè ha la forma $\forall\exists$, ma la quantificazione universale avviene su una sequenza e non su individui. Tra i concetti esprimibili tramite enunciati di complessità $\Pi^1_1$ vanno annoverati gli ordinali costruttivi. La discussione degli ordinali è condotta seguendo l'impostazione brouweriana e in particolare la dimostrazione del *bar theorem* ('teorema di sbarramento') data da Brouwer. Gli ordinali vengono definiti come alberi ben fondati: sebbene in generale la ramificazione possa essere infinita, il requisito che l'albero sia ben fondato fa sì che ogni nodo terminale, cioè un nodo da cui non partono altri rami, sia raggiungibile attraverso un numero finito di passi. Brouwer stabilisce un'equivalenza tra questa definizione di ordinali e un enunciato di complessità $\Pi^1_1$, dove il quantificatore universale verte su sequenze di scelta. L'idea di Martin-Löf è che se anche non vogliamo accettare le sequenze di scelta in quanto non rientrano nella definizione di oggetto costruttivo presentata nelle *Notes*, tuttavia possiamo accettare come valida la definizione data tramite il concetto di sbarramento e il corrispondente principio di prova che è una forma di induzione transfinita, proprio perchè essa è un enunciato di complessità $\Pi^1_1$ e quindi, per l'interpretazione delineata sopra, ha significato costruttivo. Ammettere questo tipo di enunciati ha come conseguenza che molte parti della matematica possono essere sviluppate senza dar luogo a problemi fondazionali ed è ciò che fa Martin-Löf nella dissertazione. L'originalità dell'impostazione di Martin-Löf si manifesta proprio su questo punto. La concezione di oggetto costruttivo propria della scuola markoviana viene considerabilmente estesa tramite argomenti di ispirazione brouweriana. Allo stesso tempo, però, Martin-Löf non è costretto ad assumere la controversa teoria delle sequenze di scelta brouweriana e i principi ad essa connessi. Infatti, introducendo gli ordinali costruttivi, Martin-Löf rimanda esplicitamente agli argomenti avanzati da Brouwer e fa riferimento alla 'visualizzabilità' degli ordinali rappresentati come alberi ben fondati. Tuttavia, non vi è una discussione dettagliata dell'idea: il riferimento alla visualizzabilità potrebbe essere interpretato come la possibilità di una rappresentazione concreta che, sebbene non finita, risulti essere comunque sufficientemente completa dal punto di vista dell'informazione matematica che veicola. In ogni caso, è interessante notare come il ricorso alle idee brouweriane costituisca una mossa fondamentale per allargare la concezione di oggetto costruttivo e conseguentemente le parti di matematica analizzabili all'interno di questa cornice teorica.

## 3. Normalizzazione e Curry-Howard

Il soggiorno americano del 1968-69 porta Martin-Löf ad interessarsi sempre di più alla teoria della dimostrazione e ai teoremi di normalizzazione. Qui infatti incontra Tait e Howard: il primo aveva appena dimostrato il teorema di normalizzazione per il Sistema **T** di Gödel (Tait, 1967), introducendo il metodo dei predicati di computabilità o convertibilità; il secondo mostra a Martin-Löf il manoscritto "The Formulae-as-types notion of construction", che sarebbe poi stato pubblicato alcuni anni dopo (Howard, 1980), e dove la corrispondenza tra formule e tipi, individuata da Haskell B. Curry e Robert Feys per il frammento implicazionale della logica intuizionista, è estesa alla logica del primo ordine. Allo stesso tempo non va dimenticato il confronto con Prawitz che, soprattutto attraverso l'influente monografia *Natural Deduction* (Prawitz, 2006), era uno dei principali promotori della rinascita della teoria della dimostrazione in quegli anni. In questo contesto si inserisce il lavoro di Martin-Löf.
I lavori di questo periodo, sebbene abbiano un indubbio interesse intrinseco, possono essere letti anche come lavori preparatori all'elaborazione della teoria intuizionista dei tipi. La corrispondenza o isomorfismo di Curry-Howard[5] o anche principio *proposizioni-come-tipi* stabilisce una relazione tra sistemi deduttivi di logica e calcoli computazionali. La seguente tabella esprime ciò che viene stabilito tramite questa corrispondenza:

[5]Per quanto riguarda il nome, il seguente passo è illuminante:

> Just like many other milestone ideas, the Curry-Howard Isomorphism was discovered to various extents by different people at different times. And many others contributed to its development and understanding. *Brouwer — Heyting — Kolmogorov — Schönfinkel — Curry — Meredith — Kleene — Feys — Gödel — Laüchli — Kreisel — Tait — Lawvere — Howard — De Brujn — Scott — Martin-Löf — Girard — Reynolds — Stenlund — Constable — Coquand — Huet* . . . isomorphism might be a more appropriate name, still not including all the contributors. But Curry and Howard were undoubtedly the two persons who gave the idea the crucial momentum.( Sørensen and Urzyczyn (2006), pag.viii)

| Logica | Computazione |
|---|---|
| formula | tipo |
| prova | programma |
| riduzione | valutazione programma |
| $\wedge$ | $\times$ |
| $\vee$ | $+$ |
| $\supset$ | $\rightarrow$ |
| $\forall$ | $\Pi$ |
| $\exists$ | $\Sigma$ |
| assunzione | variabile libera |
| assunzione scaricata | variabile legata |

La corrispondenza non riguarda soltanto l'aspetto statico, cioè la relazione tra prove e formule da un lato e programmi e tipi dall'altro, ma anche quello dinamico, che è espresso nella terza riga della tabella. Le procedure di riduzione permettono di eliminare i *detours* dalle prove, cioè passi ridondanti in cui la regola di introduzione per una determinata costante logica è immediatamente seguita dalla regola di eliminazione corrispondente, e quindi portano alla semplificazione di un albero di deduzione. Questa operazione corrisponde, nel caso di calcoli computazionali, alla valutazione di un programma, che è catturata da regole di riduzione come la $\beta$-riduzione del $\lambda$-calcolo, e quindi ad un passo di computazione. Consideriamo per chiarezza il seguente esempio: le regole dell'implicazione in deduzione naturale sono le seguenti

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B} \supset -I^n \qquad\qquad \dfrac{A \supset B \qquad A}{B} \supset -E$$

e la procedura di riduzione associata a queste è la seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]^n \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B} \supset -I^n \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{B} \supset -E \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\vdots \\ A \\ \vdots \\ B\end{matrix}$$

Queste regole corrispondono nel $\lambda$-calcolo tipato a:

$$\dfrac{\begin{matrix}x : A \\ \vdots \\ b : B\end{matrix}}{\lambda x.b : A \rightarrow B} \rightarrow -I \qquad\qquad \dfrac{f : A \rightarrow B \qquad a : A}{f(a) : B} \rightarrow -E$$

e la regola di riduzione è la $\beta$-regola

$$(\lambda x.b)(a) \rightsquigarrow_{\beta} b[a/x] : B.$$

Il principio proposizioni-come-tipi può essere inteso come una formalizzazione dell'interpretazione intuizionista BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) delle costanti logiche:

- una prova di $A \wedge B$ è data da una prova di $A$ e una prova di $B$;
- una prova di $A \vee B$ è data da una prova di $A$ o da una prova di $B$;
- una prova di $A \supset B$ è data da un metodo che trasforma ogni prova di $A$ in una prova di $B$;
- una prova di $\forall x.B(x)$ è data da un metodo che trasforma ogni individuo $a$ nel dominio in una prova di $B(a)$;
- una prova di $\exists x.B(x)$ è data da un individuo $a$ e da una prova di $B(a)$.

L'idea fondamentale è che una proposizione va identificata con il tipo delle sue prove ed è esattamente ciò che viene formalizzato tramite l'isomorfismo Curry-Howard. Il risultato finale è una corrispondenza tra deduzione naturale intuizionista e una certa versione del $\lambda$-calcolo tipato. Martin-Löf (1972) costituisce una delle prime applicazioni di questa corrispondenza per ottenere una dimostrazione di normalizzazione.

Sarà proprio la normalizzazione per diversi sistemi il tema principale dei lavori (Martin-Löf, 1971a), (Martin-Löf, 1971b) e (Martin-Löf, 1973): qui Martin-Löf impiega in maniera sistematica e perfeziona il metodo della computabilità di Tait. In questi tre articoli considera la teoria intuizionista delle definizioni induttive iterate, la teoria delle specie e la teoria intuizionista dei tipi semplici.

Il lavoro sulle definizioni induttive è particolarmente interessante perchè presenta uno *schema generale* per la rappresentazione dei predicati induttivi ordinari e iterati, che sarà di fondamentale importanza per la rappresentazione dei tipi induttivi nella teoria dei tipi. Questo articolo ha poi ispirato altri lavori simili, tra cui (Dybjer, 1994) e (Coquand and Paulin, 1988), e ha influenzato lo sviluppo dei moderni *proof assistants*.

Il punto interessante dal punto di vista filosofico è che lo status delle strutture induttivamente generate è strettamente connesso alla questione della predicatività. In generale, insiemi definiti tramite definizioni induttive iterate sono considerati *impredicativi* una volta formalizzati nel linguaggio della teoria degli insiemi.

Solomon Feferman e Kurt Schütte hanno indipendentemente caratterizzato come *limite* della predicatività l'ordinale $\Gamma_0$[6]. Teorie che hanno un ordinale maggiore di questo sono da considerarsi impredicative: ebbene si dimostra che già la teoria delle definizioni induttive ordinarie ha un ordinale maggiore.

Lo scopo dell'articolo è formalizzare le definizioni induttive nello stile della deduzione naturale e dimostrare la normalizzazione per il sistema ottenuto. Come caso particolare otteniamo una dimostrazione di normalizzazione per l'aritmetica, che corrisponde alla teoria in cui si ammettono solo predicati definiti tramite induzione ordinaria. É importante ricordare che anche se abbiamo una procedura di normalizzazione, non abbiamo però tutti i suoi corollari, in particolare non vale la proprietà della sottoformula.

[6] L'ordinale $\alpha$ di una teoria **T** è il minimo ordinale ricorsivo tale che **T** non dimostra che $\alpha$ è ben-fondato. Ad esempio, nel caso dell'aritmetica di Peano tale ordinale è $\varepsilon_0$. La concezione della predicatività proposta da Feferman e Schütte è detta predicatività *dati i numeri naturali*, non è però l'unica concezione possibile (vedi Feferman (2005)).

L'esempio paradigmatico di definizione induttiva *ordinaria* è quella dei numeri naturali. Introduciamo un predicato **N** che ha le seguenti regole di introduzione[7]:

$$\mathbf{N}(0) \qquad \frac{\mathbf{N}(x)}{\mathbf{N}(s(x))}$$

Intuitivamente, le clausole ci dicono che il numero zero è un numero naturale e che se un certo numero $n$ è un naturale, allora lo è anche il suo successore.
Analogamente possiamo definire l'uguaglianza tramite un predicato **Eq** che ha come regola di introduzione $\mathbf{Eq}(x, x)$, che esprime la riflessività dell'uguaglianza.
L'esempio paradigmatico, invece, di definizione induttiva *iterata* è data dalla definizione degli ordinali. Introduciamo un predicato **Ord** con le seguenti regole di introduzione:

$$\mathbf{Ord}(0) \qquad \frac{\mathbf{Ord}(a)}{\mathbf{Ord}(s(a))} \qquad \frac{\mathbf{N}(x) \rightarrow \mathbf{Ord}(a_x)}{\mathbf{Ord}(sup(a_x))}$$

La terza regola ci dice che data una sequenza di ordinali $a_n$, possiamo prendere il *sup* di questa e sarà ancora un ordinale. Inoltre, la definizione poggia sulla definizione dei naturali, che a sua volta è induttiva. Il processo può essere ulteriormente iterato e ciò spiega il nome di definizioni induttive iterate.
Queste regole sono istanze di schemi generali, che nel caso delle regole di introduzione sono tre in totale:

$$\frac{P(\vec{p}[\vec{x}]) \qquad \ldots \qquad Q(\vec{q}[\vec{x}])}{R(\vec{r}[\vec{x}])}$$

Questo è lo schema per le definizioni ordinarie: le lettere $P, Q, R$ stanno per predicati, mentre $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ per sequenze di termini chiusi e $[\vec{x}]$ per sequenze di variabili libere. Come suggerito dagli esempi sopra, possiamo avere anche il caso in cui non si hanno premesse.[8]
Le definizioni induttive iterate sono generate da questi due schemi:

$$\frac{P[\vec{x}]^9 \rightarrow Q(\vec{q}[\vec{x}])}{R(\vec{r}[\vec{x}])} \qquad \frac{\forall y P(\vec{p}[\vec{x}, y])}{R(\vec{r}[\vec{x}])}$$

La teoria presentata da Martin-Löf è una teoria intuizionista: ciò implica che le clausole vanno lette secondo l'interpretazione BHK e quindi negli ultimi due schemi ci sarà un riferimento a un metodo che trasforma prove di una certa formula in prove di un'altra.
Essendo un calcolo in deduzione naturale, avremo anche delle regole di eliminazione e queste insieme alle corrispondenti regole di introduzione genereranno dei nuovi detours, oltre quelli dati dalle regole per connettivi e quantificatori.
Le regole di eliminazione per **N** e **Eq**, ad esempio, sono le seguenti:

[7] In (Martin-Löf, 1971a) vengono chiamate regole di produzione.

[8] In realtà, ai predicati viene assegnato un livello per ragioni tecniche che non possono essere approfondite qui e si richiede che il livello della conclusione sia maggiore o uguale a quello delle premesse.

$$\dfrac{\mathbf{N}(t) \qquad P(0) \qquad \begin{array}{c} P(x) \\ \vdots \\ P(s(x)) \end{array}}{P(t)} \qquad \dfrac{\mathbf{Eq}(a,b) \qquad P(x,x)}{P(a,b)}$$

É evidente che la regola di eliminazione per **N** non è altro che il familiare principio di induzione dell'aritmetica.
Lo schema generale per le regole di eliminazione avrà questa forma:

$$\dfrac{P(\vec{t}) \qquad \widehat{\mathfrak{D}}}{Q(\vec{t})}$$

$\mathfrak{D}$ indica deduzioni che riguardano il predicato $Q$ in relazione a termini ottenuti tramite regole di introduzione.
Ovviamente avremo anche delle procedure di riduzione associate alle regole, che hanno un ruolo chiave nel teorema di normalizzazione.

**Definizione** Una derivazione $\mathfrak{D}$ riduce a una derivazione $\mathfrak{D}^{'}$ se quest'ultima può essere ottenuta da $\mathfrak{D}$ attraverso ripetute riduzioni di sottoderivazioni.

**Definizione** Una derivazione $\mathfrak{D}$ si dice in *forma normlae* se non è possibile applicare ad essa regole di riduzione.

Il teorema di normalizzazione fornisce esattamente una procedura per trovare la forma normale di una data derivazione. Sinteticamente, il teorema ha la seguente struttura:

i) prima si definisce quando una derivazione è *normalizzabile*, cioè quando riduce a una forma normale.

ii) poi si definisce quando una derivazione è *computabile* e questo è il passo cruciale. La definizone è data in modo da ottenere che se $\mathfrak{D}$ è computabile, allora $\mathfrak{D}$ è normalizzabile.

iii) infine, si dimostra, ragionando per induzione, che ogni derivazione è computabile, da cui si ricava come corollario che ogni derivazione riduce a una forma normale.

La dimostrazione è dunque un esempio di applicazione del metodo dei predicati di computabilità, che nello stesso periodo venne originalmente rivisitato da Girard per dimostrare la normalizzazione del suo *Sistema F* (Girard, 1972), cioè un esempio di $\lambda$-calcolo del secondo ordine, da cui si ottiene anche la consistenza dell'aritmetica del secondo ordine. La variante introdotta da Girard è nota come metodo dei *candidati di riducibilità* e rappresentò un'innovazione cruciale per trattare il caso della quantificazione al secondo ordine, cioè pienamente impredicativa. Martin-Löf adotterà una tecnica simile in (Martin-Löf, 1971b) e (Martin-Löf, 1973).

## 4. La teoria intuizionista dei tipi

La teoria intuizionista dei tipi o teoria dei tipi di Martin-Löf (**MLTT**) è un sistema formale che può essere visto sia come una teoria fondazionale per la matematica costruttiva sia come un modello astratto per linguaggi di programmazione funzionali. Senza dubbio questa teoria costituisce il maggior contributo di Martin-Löf alla logica e ai fondamenti della matematica e, come vedremo, ha avuto una notevole influenza in diversi ambiti di ricerca. Soprattutto, fin dalla sua prima apparizione all'inizio degli anni '70, essa ha costituito lo sfondo delle riflessioni più dichiaratamente filosofiche di Martin-Löf, ragione per cui è opportuno dedicare un certo spazio all'espozione dei concetti di base della teoria.
Un primo caveat è che Martin-Löf ha presentato la teoria in forme diverse nelle varie pubblicazioni e ulteriori modifiche sono state considerate in seguito da altri studiosi[10]. Una prima distinzione è quella che intercorre tra la variante *intensionale* della teoria e quella *estensionale*. I primi articoli (Martin-Löf, 1975),(Martin-Löf, 1998a),(Martin-Löf, 1975), presentano la teoria nella forma intensionale, mentre quella estensionale è formulata in (Martin-Löf, 1982) e (Martin-Löf, 1984). Le due versioni presentano proprietà molto differenti, con conseguenze sul piano concettuale non trascurabili. Presenteremo prima la versione intensionale, rispettando l'ordine cronologico, in modo da poter evidenziare lo sviluppo delle idee di Martin-Löf.

### 4.1 **La teoria intensionale**

Nel 1967 viene pubblicato il libro di Errett A. Bishop *Foundations of Constructive Analysis* (Bishop, 1967). L'opera di Bishop sviluppava l'analisi costruttiva ad un livello di profondità mai raggiunto prima ed ebbe come conseguenza un rinnovamento dell'interesse per la matematica costruttiva. Soprattutto, la varietà di costruttivismo proposta da Bishop evitava alcune delle nozioni più ostiche della matematica intuizionista brouweriana ed era in linea di principio compatibile con la matematica classica. Tuttavia il background fondazionale assunto da Bishop non era compiutamente delineato e dunque si poneva il problema di darne una formalizzazione adeguata, che ne esplicitasse i principi di base.
L'anno precedente era stato pubblicato un articolo di Kreisel, "The foundations of intuitionistic logic" (Kreisel, 1966), dove veniva proposta una teoria delle costruzioni in grado di catturare le nozioni di base della matematica intuizionista. In apertura dell'articolo, Kreisel scriveva che:

> Intuitionistic mathematics, as developed by Brouwer and Heyting, has two aspects. Its negative aspect, which is well-known, rejects the basic notions of set-theoretic (or classical) mathematics. The positive aspect is this: the notions of 'construction(constructive function)' and 'constructive proof (of equality between two constructions)' are regarded as sufficiently clear for at least a part of mathematics to be built up systematically from some evident assertions about these notions. This aspect has been largely disregarded, probably because of current preoccupation with formal and first-order aspects of mathematics. (Kreisel (1966), pag.198)

Il punto principale dell'analisi kreiseliana era comprendere l'intuizionismo *iuxta propria principia*, senza far ricorso a linguaggi compresi, più o meno esplicitamente, in maniera classica. Un progetto per molti aspetti simile era portato avanti da Dana Scott nel suo lavoro "Constructive Validity" (Scott, 1970).

[10]Infatti, con l'espressione teoria dei tipi intuizionista, più che una singola teoria, si indica una famiglia di teorie.

La teoria dei tipi di Martin-Löf si presenta appunto come una formalizzazione della matematica costruttiva alla Bishop e allo stesso tempo come un modo di intendere i principi cardine del costruttivismo privo di qualsiasi residuo classico. In particolare, come suggerito anche dalla citazione di Kreisel riportata sopra, se la matematica classica può essere vista come un sistema incentrato sulla nozione di *insieme* e, si potrebbe aggiungere, su una particolare concezione di tale nozione, la matematica costruttiva ha come concetti fondamentali il concetto di *prova* o *costruzione* e quello di *funzione* o *metodo*, che ovviamente non è da intendersi secondo la definizione insiemistica standard. Un linguaggio dove la nozione di funzione è presa come primitiva è il $\lambda$-calcolo. Abbiamo visto come la corrispondenza Curry-Howard stabilisce una relazione tra varie versioni del $\lambda$-calcolo tipato e sistemi logici e, allo stesso tempo, costituisce anche una formalizzazione della lettura intuizionista delle costanti logiche. L'idea di Martin-Löf consiste nel sviluppare questa concezione del rapporto tra logica (intuizionista) e computazione insieme alla *dottrina dei tipi* di Russell.
Questa prevedeva che ogni funzione proposizionale $\phi(x)$ avesse sempre un tipo come dominio o *range of significance*. Martin-Löf riprende e generalizza questa idea asserendo che ogni oggetto matematico è sempre dato insieme al suo tipo. Ciò comporta che non sia possibile definire un oggetto senza specificare il suo tipo e che quindi vadano definiti simultaneamente. La corrispondenza Curry-Howard rende possibile parlare non solo di termini e tipi, ma, equivalentemente, di prove e proposizioni. Martin-Löf considera tale corrispondenza come una vera e propria *identificazione*, quindi in una maniera molto rigida e non è esagerato sostenere che nella sua visione essa costituisca l'asse portante dell'intera teoria.
Un tipo è definito prescrivendo come costruire un oggetto che gli appartenga, in sintonia con la definizione di insieme proposta da Bishop. Tuttavia è importante osservare che si sta facendo riferimento ad un oggetto *arbitrario*, non si sta richiedendo che si sappia generare ogni oggetto di un dato tipo. Se le proposizioni vengono intese come tipi, allora una proposizione sarà definita prescrivendo cosa costituisca una prova per essa. Quindi, una proposizione è pensata come il tipo delle sue prove ed è evidente il legame con l'interpretazione BHK.
Inoltre, la teoria dei tipi è un esempio di teoria *logic-free*, in quanto la logica non viene definita separatamente, ma le costanti logiche sono ricavate da un'interpretazione speciale delle regole per i costruttori di tipi. Ciò marca un'importante differenza tra **MLTT** e altri sistemi come le teorie degli insiemi, sia classiche che costruttive, dove invece viene assunta una formulazione della logica e poi vengono dati gli assiomi specifici della teoria.
La primissima versione della teoria dei tipi apparve in un preprint (Martin-Löf, 1971c) ed era caratterizzata dall'avere un forte assioma impredicativo $V : V$, che asseriva l'esistenza di un tipo di tutti i tipi. Il lettore potrebbe subito pensare a quest'aggiunta come ad un'ingenuità che espone il sistema a paradossi simili a quello russelliano, ma in realtà non si può replicare tale ragionamento in maniera meccanica in questo contesto. Non abbiamo a disposizione un simbolo di appartenenza globale '$\in$' e il giudizio $x : A$, da leggersi '$x$ è un elemento del tipo $A$', non può essere negato, in quanto possiamo applicare una costante logica come la negazione solo a proposizioni, ma non a giudizi. La distinzione tra proposizioni e giudizi che si ha nella teoria dei tipi diventerà uno dei temi centrali della filosofia della logica di Martin-Löf.
Tuttavia, Jean-Yves Girard riuscì a dimostrare l'inconsistenza della teoria dei tipi con l'assioma $V : V$. La dimostrazione può essere vista come una sorta di versione dell'argomento di Burali-Forti sull'insieme di tutti gli ordinali nel linguaggio della teoria dei tipi.[11]

[11] Un'analisi illuminante del paradosso di Girard si trova in (Coquand, 1986).

É interessante considerare perchè Martin-Löf aveva incluso tale principio. Due degli assunti di base della teoria dei tipi sono da un lato l'idea che ogni oggetto abbia un tipo e che una funzione proposizionale abbia sempre un tipo come 'range of significance', dall'altro la corrispondenza tra proposizioni e tipi. Come abbiamo sottolineato però, Martin-Löf vuole presentare un sistema che sia la formalizzazione fedele della matematica costruttiva e quindi sia sufficientemente espressivo da poter catturare molte definizioni e principi che si utilizzano nella pratica matematica. Da questo punto di vista può sembrare ragionevole ammettere la quantificazione su tipi. Inoltre, la mossa era anche giustificata da un punto di vista concettuale, come viene ricordato in (Martin-Löf, 2008). Infatti, negli anni immediatamente precedenti l'attività di ricerca su sistemi intuizionisti impredicativi era stata molto intensa: l'obiettivo era comprendere e possibilmente giustificare le definizioni impredicative da un punto di vista intuizionista.

Ora, ammettere la quantificazione su proposizioni implica che la collezione delle proposizioni sia un tipo, cioè abbiamo un tipo di tutte le proposizioni. Ma le proposizioni corrispondono a tipi e quindi esiste un tipo di tutti i tipi.

Il paradosso di Girard segna la fine, almeno nell'ottica di Martin-Löf, di ogni proposta teorica volta a coniugare impredicatività e costruttività. Ciò non significa che non si possano sviluppare teorie insieme costruttive e impredicative[12], ma che queste devono rinunciare all'identificazione tra proposizioni e tipi, che, come abbiamo visto in precedenza, è il cardine della teoria dei tipi secondo Martin-Löf.

A tal proposito, questo passo in (Martin-Löf, 2008) risulta illuminante:

> I will use the term set, but you should understand it in the sense of individual domain, or quantificational domain: in first-order predicate logic, you always quantify over a domain, and Curry-Howard is a correspondence, or isomorphism, between propositions and sets in that sense. The Curry-Howard correspondence was to me from the beginning the natural completion of the Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation of intuitionistic first-order predicate logic, just drawing the full consequences, so to say, of the Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation. Now the paradox that Girard discovered in 1971 (Girard 1972), in the first version of constructive type theory, then called intuitionistic type theory, showed that Curry-Howard is incompatible with impredicativity: if you combine the Curry-Howard identification of propositions and sets with impredicativity, that is, the possibility of quantifying over propositions, over classes, over relations, and so on, you end up with a contradiction. So one of them has to go: either Curry-Howard has to go or there is some problem with impredicativity, with which there had been problems from the very beginning: when the notion itself was introduced by Russell in 1906 (Russell 1906), it was precisely because it was a problematic notion. So it seems fair to say that Girard's paradox put an end to the optimism about impredicative intuitionism in the 1960s,[...] So, hopeful as impredicative intuitionism had seemed for some time, during the approximate decade from Spector's paper to Girard's paradox, it nevertheless ended in disillusion. (Martin-Löf (2008), pagg.249-250)

[12] Si veda, ad esempio, il sistema presentato in (Coquand and Huet, 1988), alla base del celebre proof-assistant Coq.

**MLTT** ammette più forme di *giudizio* rispetto al calcolo dei predicati e quindi la struttura della teoria risulta essere molto più complicata. Il calcolo dei predicati può essere visto come un sistema con un unico tipo di giudizio, che può essere rappresentato come segue:

$$A_1, \dots, A_n \vdash C$$

il cui significato informale è 'la proposizione $C$ è vera sotto l'ipotesi che le proposizioni $A_1, \dots, A_n$ siano vere'. Ovviamente avremo anche il caso '$\vdash C$', in cui si asserisce la verità della proposizione in maniera *categorica*, cioè non dipendente da assunzioni.
Le forme di giudizio di base sono quattro:

a) $\Gamma \vdash A$ type

b) $\Gamma \vdash a : A$

c) $\Gamma \vdash A \equiv B$

d) $\Gamma \vdash a \equiv b : A$

La forme di giudizio appena introdotte sono *ipotetiche*, cioè dipendono dalle assunzioni nel contesto $\Gamma$, che è una lista di variabili tipate $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$. Inoltre, ogni tipo nel contesto potrebbe dipendere dai tipi precedenti, ad esempio $A_2$ potrebbe dipendere da $(x_1 : A_1)$. Il caso in cui $\Gamma$ è vuoto corrisponde invece alle forme di giudizio categoriche.
La forma di giudizio a) stabilisce che il tipo $A$ è ben formato nel contesto $\Gamma$, mentre b) asserisce la verità di $A$ vista come proposizione e ciò corrisponde ad esibire un termine, ossia una prova, $a$ di $A$. Le forme c) e d) stabiliscono, rispettivamente, che $A$ e $B$ sono tipi uguali (nel contesto $\Gamma$), e che $a, b$ sono termini uguali di tipo $A$ (sempre in $\Gamma$). La nozione di uguaglianza che compare qui è detta *uguaglianza definizionale* e non è l'unica nozione di uguaglianza che abbiamo in **MLTT**.
Martin-Löf presenta il suo sistema nello stile della deduzione naturale. Di conseguenza, ci aspetteremo che ogni costruttore di tipo sia presentato attraverso uan regola di introduzione, una regola di eliminazione e una procedura di riduzione per i passi ridondanti. La novità è che abbiamo, oltre a questi tre tipi di regole, anche una regola di *formazione* la cui conclusione stabilisce che un certo tipo è ben formato. Inoltre, le procedure di riduzione sono chiamate regole di *computazione*, rendendo bene l'idea che riguardino l'aspetto 'dinamico' dell'esecuzione di un programma. Dunque, ogni tipo sarà introdotto seguendo questo pattern delle quattro regole.
Uno degli aspetti più originali del lavoro di Martin-Löf è costituito dall'introduzione dei *tipi dipendenti*[13]. In breve, un tipo dipendente è un tipo la cui definizione dipende da uno o più termini di altri tipi. Ad esempio, una funzione propsizionale alla Russell della forma $\phi(x)[x \in A]$ o una famiglia di insiemi $\{B_x\}_{x \in A}$ possono essere viste come tipi dipendenti.
Esempi importanti di tipi dipendenti sono dati dai costruttori $\Pi$ e $\Sigma$, chiamati, rispettivamente, tipo del prodotto dipendente e tipo della somma indiciata. Le regole per $\Pi$ sono le seguenti:

- $\Pi$ – **Formazione:** supponi che $A$ sia un tipo, $x : A$ e $B(x)[x : A]$ tipo dipendente, allora possiamo formare il tipo $\Pi(x : A).B(x)$.

[13] I tipi dipendenti sono stati introdotti indipendentemente anche da Nicolaas G. De Bruijn nel contesto del progetto *Automath* (De Bruijn, 1970), che ha ricoperto un ruolo pionieristico nell'ambito della dimostrazione assistita.

- $\Pi$ − **Introduzione:** supponi che $x : A$ e $b(x) : B(x)$, allora possiamo introdurre il termine $\lambda x : A.b(x) : \Pi(x : A).B(x)$.
- $\Pi$ − **Eliminazione:** siano $f : \Pi(x : A).B(x)$ e $a : A$, allora l'applicazione di $f$ ad $a$, scritta $f(a)$, sarà un termine di tipo $B(a)$.
- $\Pi$ − **Computazione:** date le premesse $b(x) : B(x)[x : A]$ e $a : A$, segue che $(\lambda x : A.b(x))a \equiv b[a/x] : B[a/x]$. In pratica, prima compiamo l'operazione di $\lambda$-astrazione (regola di introduzione) e poi quella di applicazione (regola di eliminazione) e il tutto è definizionalmente uguale a $b(a) : B(a)$. Ciò spiega come le regole di computazione non siano altro che le procedure di riduzione della deduzione naturale.

Le regole per il tipo $\Pi$ permettono di rappresentare le regole del quantificatore univerale $\forall$. Inoltre, nel caso in cui $B$ non dipenda da $A$, otteniamo l'interpretazione dell'implicazione: $\Pi(x : A)B \equiv A \to B$.
Le regole per $\Sigma$ sono:

- $\Sigma$ − **Formazione:** abbiamo le stesse premesse del caso di $\Pi$ − **F**, da cui concludiamo però che $\Sigma(x : A).B(x)$ è un tipo ben-formato.
- $\Sigma$ − **Introduzione:** date le premesse $a : A$ e $b : B(a)$, possiamo introdurre il termine $\langle a, b\rangle : \Sigma(x : A).B(x)$.
- $\Sigma$ − **Eliminazione:** assumiamo che $C(z)$ sia un tipo dipendente da $z : \Sigma(x : A).B(x)$ e supponiamo inoltre che $c : \Sigma(x : A).B(x)$ e $d(x, y) : C(\langle x, y\rangle)[x : A, y : B(x)]$. Allora possiamo costruire un termine $Ind_\Sigma(c, d(x, y))$ di tipo $C(c)$.
- $\Sigma$ − **Computazione:** assunzioni uguali alla regola precedente per $C(z)$ e $d(x, y) : C(\langle x, y\rangle)$, ma assumiamo anche che $a : A$ e $b : B(a)$. Allora concludiamo che $Ind_\Sigma(\langle a, b\rangle, d(x, y)) \equiv d[a/x, b/y] : C[\langle a, b\rangle/z]$.

Le regole per il tipo $\Sigma$ ci consentono di rappresentare il quantificatore esistenziale $\exists$ e, come caso particolare quando $B$ non dipende da $A$, il prodotto $A \times B$, che rappresenta la congiunzione.
Il caso dell'esistenziale è molto interessante perchè mostra che la logica della teoria dei tipi è strettamente più forte della formalizzazione standard della logica intuizionista[14] e ciò è dovuto al fatto che abbiamo maggiore informazione grazie alla presenza dei termini-prova. In particolare, le regole date sopra per $\Sigma$ consentono di derivare la seguente formula:

$$(\Pi x : A)(\Sigma y : B(x))R(x, y) \to (\Sigma f : (\Pi x : A)B)(\Pi x : A)R(x, f(x))$$

che è la formalizzazione dell'*assioma di scelta* (**AC**) nel linguaggio della teoria dei tipi.
Il fatto che **AC** sia dimostrabile potrebbe essere a prima vista sorprendente: infatti, spesso questo assioma è presentato come esempio di principio non-costruttivo. Il merito principale di Martin-Löf[15] è stato mostrare come questa visione sia semplicistica e come il discorso sullo statuto di **AC** in ambito costruttivo sia molto più delicato e sottile.

[14] Analogo è il caso della disgiunzione: la rappresentazione tramite il costruttore $+$ è caratterizzata da regole più forti. Le regole per $+$ possono essere trovate nell'Appendice.

[15] (Martin-Löf, 2006) presenta un'analisi molto dettagliata dello status dell'assioma di scelta in matematica costruttiva.

É noto che l'assioma fu introdotto da Ernst Zermelo nei primi anni del '900 e fu subito al centro di un'animata discussione. In particolare, un gruppo di matematici francesi molto celebri, come René-Louis Baire, Émile Borel e Henri Lebesgue, criticarono l'intorduzione dell'assioma in quanto asseriva l'esistenza di una funzione di scelta senza, tuttavia, propriamente definirla.
Se in ambito classico l'assioma è stato definitivamente accettato, in ambito costruttivo la questione è più dibattuta. Argomenti volti a sostenere il carattere non costruttivo di **AC** fanno spesso riferimento a risultati come il teorema di Diaconescu in teoria dei topos o il teorema di Goodman-Myhill in teoria degli insiemi costruttiva. Questi risultati mostrano come l'assunzione dell'assioma di scelta permetta di derivare il principio del terzo escluso, rendendo così la teoria classica. Tuttavia, è importante sottolineare che la dimostrazione richiede anche la presenza di altri principi oltre ad **AC**.
La semplice dimostrazione data da Martin-Löf, di fatto, è una formalizzazione dell'osservazione di Bishop per cui "a choice function exists in constructive mathematics, because a choice is implied by the very meaning of existence" (Bishop (1967), pag.9). Quindi, **AC** è una conseguenza immediata della lettura intuizionista delle costanti logiche e, in particolare, di come viene interpretata la quantificazione esistenziale. Ciò implica che una formalizzazione fedele dell'esistenziale costruttivo sia data dalle regole per $\Sigma$ proposte da Martin-Löf, ma va notato che questo non è affatto l'unico modo di intendere la quantificazione esistenziale da un punto di vista costruttivo.
Infine, la versione dell'assioma di scelta data sopra è pensata per *tipi*. Come ha dimostrato Martin-Löf in(Martin-Löf, 2006), la situazione cambia significativamente se consideriamo tipi accompagnati da relazioni di equivalenza definite su di essi [16], che sembrano costituire una formalizzazione più fedele della concezione di insieme di Bishop.
Un aspetto peculiare della teoria dei tipi di Martin-Löf è la distinzione tra due nozioni di uguaglianza: una è la già menzionata uguaglianza definizionale, che è un giudizio, mentre l'altra è *l'uguaglianza proposizionale*, che invece è una proposizione e dunque un tipo.
Le regole per il tipo dell'uguaglianza proposizionale $Id_{-}(-,-)$ sono le seguenti:

- date le premesse $A$ tipo ben-formato e $a, b : A$, allora possiamo formare il tipo $Id_A(a, b)$. Possiamo anche utilizzare la notazione alternativa '$a =_A b)'$.
- dato $a : A$, possiamo introdurre il termine *refl(a)* : $Id_A(a, a)$.
- data una famiglia di tipo $C(x, y, p)[x : A, y : A, p : x =_A y]$ e le seguenti $c : C(z, z, refl(z)), a : A, b : A$ e $q : a =_A b$. Allora possiamo concludere $\mathcal{J}(p, c) : C(a, b, q)$. La regola è una forma di induzione strutturale, esattamente come le altre regole di eliminazione; in pratica, se il predicato $C$ vale per il caso riflessivo, allora vale per ogni altro caso di uguaglianza proposizionale.
- non riportiamo la regola di computazione, ma può essere derivata dalle precedenti seguendo lo stesso pattern all'opera nelle regole per altri tipi. In ogni caso, è inclusa nell'Appendice.

Il rapporto tra le due nozioni di uguaglianza è stato a lungo oggetto della riflessione di Martin-Löf. Anticipiamo soltanto che il passaggio alla teoria estensionale è determinato proprio da una modifica delle regole per l'uguaglianza proposizionale.

[16]Questi sono chiamati *setoids* nella letteratura.

Mentre la prima versione della teoria dei tipi (Martin-Löf, 1998a) non aveva regole per il tipo *Id*, questo viene aggiunto come tipo primitivo nella successiva versione esposta in (Martin-Löf, 1975) e la relazione con l'uguaglianza definizionale è analizzata in dettaglio da Martin-Löf nel lavoro (Martin-Löf, 1975).
Ci sono alcune differenze ovvie tra le due nozioni: l'uguaglianza definizionale è un giudizio e quindi non richiede evidenza, cioè una costruzione che sia una prova di essa; l'uguaglianza proposizionale, al contrario, richiede una costruzione per essere stabilita e può essere assunta nel corso di una dimostrazione. A titolo di esempio: $(\lambda x.b(x))a \equiv b(a)$ è un esempio di uguaglianza definizionale che è generata dalle regole del sistema e che, quindi, può essere meccanicamente verificata. Un'espressione come $\Pi(x, y : \mathbb{N}).(x + y =_{\mathbb{N}} y + x)$ è una proposizione e dunque è necessario trovare una costruzione per poterla asserire, cioè, in breve, richiede una prova.
La caratterizzazione dell'uguaglianza definizionale proposta in (Martin-Löf, 1975) specifica appunto che tale nozione è una relazione tra *espressioni linguistiche* e non tra le entità astratte denotate da queste. Da un punto di vista storico, è interessante notare che Martin-Löf rimandi esplicitamente al Frege della *Begriffsschrift*, dove viene introdotta una nozione simile a quella di uguaglianza definizionale.
Essendo una relazione puramente linguistica, possiamo intendere l'uguaglianza definizionale tra due espressioni come una riscrittura formale tra queste generata dalle regole del sistema.
Per Martin-Löf tre principi informali caratterizzano l'uguaglianza definizionale e quindi devono trovare posto tra le regole del sistema:

(i) Un definiens è sempre definizionalmente uguale al suo definiendum.

(ii) L'uguaglianza definizionale è sempre preservata dalla sostituzione. Data un'espressione della forma $c(x)$ e data $a \equiv b$, allora $c(a) \equiv c(b)$.

(iii) L'uguaglianza definizionale è una relazione di equivalenza. Quindi valgono le seguenti: $a \equiv a$, se $a \equiv b$ allora $b \equiv a$ e se $a \equiv b$ e $b \equiv c$, allora $a \equiv c$.

La conseguenza importante è che alcune regole, tradizionalmente incluse in calcoli tipati e anche in alcune versioni della teoria dei tipi di Martin-Löf, vanno espunte dal sistema. Il motivo è che non possono essere derivate dai principi (i)-(iii) esposti in precedenza e, quindi, non possono essere considerate come caratterizzanti l'uguaglianza definizionale[17]. Un esempio è la regola $\xi$:

$$\frac{b(x) \equiv c(x)}{\lambda x.b(x) \equiv \lambda x.c(x)}\ \xi$$

Un altro è la regola di espansione o regola $\eta$:

$$\lambda x(b(x)) \equiv b \text{ } (x \text{ non occorre libera in } b)$$

Quest'ultima corrisponde al caso in cui una regola di eliminazione è subito seguita dall'applicazione della corrispondente regola di introduzione.

[17] In realtà, Martin-Löf offre anche alcuni argomenti più tecnici che hanno a che fare con le particolari difficoltà che pongono queste regole quando si prova a dimostrare un risultato di normalizzazione.

In generale, abbiamo che, date due espressioni $a, b : A$, se $a \equiv b : A$, allora $Id_A(a, b)$. L'implicazione inversa però non vale in generale, almeno nel caso della teoria intensionale.
Ciò che rende il sistema proposto da Martin-Löf particolarmente adatto alla formalizzazione della matematica costruttiva è la possibilità di utilizzare diverse forme di definizioni induttive. Abbiamo ovviamente definizioni induttive ordinarie come quella che genera il tipo dei numeri naturali, ma anche definizioni induttive generalizzate, che rendono possibile l'introduzione degli ordinali costruttivi. Un discorso a parte merita l'introduzione delle definizioni *induttive-ricorsive*, l'esempio principale delle quali è dato dall'universo $\mathcal{U}$. L'introduzione del tipo $\mathcal{U}$ aumenta considerevolmente la forza espressiva della teoria e permette, ad esempio, di definire funzioni per ricorsione sui tipi, trattandoli in un certo senso come termini. Infatti, l'universo avrà i tipi dati dai costruttori della teoria come oggetti ed è esso stesso un tipo, anche se non vale $\mathcal{U} : \mathcal{U}$, in quanto renderebbe la teoria inconsistente. Per spiegare questa situazione, Martin-Löf ricorre alla distinzione tra tipi *large* e tipi *small*, ispirata dalla teoria delle categorie: i tipi 'small' sono quelli ottenuti tramite i costruttori ordinari quali $\Pi, \Sigma, \mathbb{N} \ldots$ e che sono oggetti di $\mathcal{U}$, mentre i tipi 'large' sono, oltre all'universo $\mathcal{U}$, i tipi definiti a partire da questo che non sono oggetti di tipo $\mathcal{U}$. Ci sono due modi per introdurre il tipo universo $\mathcal{U}$:

- alla Russell: i tipi come elementi di $\mathcal{U}$ e i tipi come costruttori vengono identificati.

- alla Tarski: $\mathcal{U}$ consiste di *codici* per tipi e quindi la distinzione viene preservata.

Nel caso alla Tarski, avremo una funzione di decodifica **T**, che può essere vista come una regola di eliminazione per l'universo. Vale che se $a : \mathcal{U}$, allora $\mathbf{T}(a)$ è un tipo. Bisogna notare che questa funzione di decodifica compare già nelle regole di introduzione per $\mathcal{U}$ (vedi Appendice per un esempio), mentre solitamente la regola di introduzione per un tipo non contiene riferimenti alla corrispettiva regola di eliminazione. Proprio per questo motivo la definizione dell'universo alla Tarski è un esempio di definizione *induttiva-ricorsiva*: *simultaneamente*, si ha la generazione induttiva di un tipo e una definizione ricorsiva di una funzione su di esso.
Infine, il processo che porta all'introduzione di un universo può essere iterato: così si ottiene una gerarchia cumulativa infinita di universi $\mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_3 \ldots$.
Nei lavori (Martin-Löf, 1998a) e (Martin-Löf, 1975) Martin-Löf dimostra anche diverse proprietà metateoriche della teoria dei tipi intensionale. In particolare, dimostra un teorema di normalizzazione per questo sistema che ha importanti conseguenze concettuali. Se in (Martin-Löf, 1998a), la dimostrazione è condotta mediante il già più volte citato metodo dei predicati di computabilità, in (Martin-Löf, 1975) il risultato è ottenuto attraverso una nuova tecnica che verrà riscoperta solo in seguito (Berger and Schwichtenberg, 1991) ed è nota come *normalization by evaluation*. Inoltre, va ricordato che sono proprio queste proprietà a rendere la teoria intensionale adeguata come base per la dimostrazione assistita e per la verifica della correttezza delle prove. Elenchiamo le principali:

- *Church-Rosser* : se un'espressione $\alpha$ riduce a una forma normale, allora questa è unica: se $\alpha$ riduce a $\beta_0$ e $\beta_1$, allora esiste $\gamma$ tale che $\beta_0$ e $\beta_1$ riducono entrambi a $\gamma$.

- Riduzione preserva il tipo (*subject reduction*): se $t : A$ e $t \rightsquigarrow t_1$, allora $t_1 : A$.

- Normalizzazione: ogni termine riduce a una forma normale (anche i tipi visti come termini di $\mathcal{U}$).

Come dicevamo, il teorema di normalizzazione è molto importante: non solo assicura la consistenza del sistema, ma anche che le espressioni che possiamo formare siano dotate di significato. Il paradigma che vede il legame tra forma normale e significato di un'espressione può essere ricondotto ad Alonzo Church per i calcoli tipati, e inoltre il ruolo fondamentale delle procedure di riduzione per la normalizzazione si collega alla nozione di *armonia*, proposta da Dummett e Prawitz, come criterio per la definizione e il significato delle costanti logiche. Come vedremo nella prossima sezione, Matin-Löf inizierà proprio in questi anni ad occuparsi di una teoria del significato basata sulla logica intuizionista, che lo porterà a riconsiderare le regole della teoria dei tipi.
Ma la normalizzazione è importante anche per alcuni suoi corollari:

- l'uguaglianza definizionale è decidibile.
- Unicità del tipo.
- decidibilità del *type-checking*, cioè del problema di determinare se, dati un contesto $\Gamma$, un termine $a$ e un tipo $A$, il giudizio $\Gamma \vdash a : A$ sia derivabile o meno.

L'ultimo punto è messo in relazione da Martin-Löf (Martin-Löf, 1975) con la questione della decidibilità della relazione di prova in ambito intuizionista. Di fatto, l'idea è che dovremmo poter decidere ricorsivamente se una certa costruzione è la prova di una data proposizione in ottemperanza al motto kreiseliano 'we recognize a proof when we see one'. Formalmente, questa condizione di adeguatezza sulla relazione di prova intuizionista è soddisfatta grazie alla decidibilità del type-checking e quindi, in ultima analisi, grazie alla normalizzazione.
Inoltre, in uno scritto più tardo (Martin-Löf, 1994), Martin-Löf ha discusso queste proprietà dei giudizi in relazione all distinzione kantiana tra giudizi analitici e giudizi sintentici. Le proprietà esposte sopra assicurano che la logica dei giudizi analitici è completa e decidibile, mentre quella dei giudizi sintetici è incompleta e indecidibile. I giudizi sintetici sono, ad esempio, giudizi della forma 'P è vera', che equivalgono a dire intuizionisticamente che esiste una prova di $P$. Ora per convincersi di questo fatto non possiamo semplicemente analizzare la definizione o riflettere sul significato delle espressioni coinvolte, ma dobbiamo effetturare una costruzione che conferisca evidenza al giudizio. In questo senso, è un giudizio sintetico a priori e le leggi logiche nella loro formulazione usuale rientrano tutte in questa classificazione. Di conseguenza, la logica di questi giudizi è incompleta e indecidibile. Al contrario, i giudizi analitici non necessitano di costruzioni per risultare evidenti.

### 4.2 La teoria estensionale

Al Logic Colloquium del 1973, tenutosi a Bristol, Michael Dummett presentò un testo, "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic" (Dummett, 1975), destinato a diventare molto influente. Dummett proponeva nuovi argomenti in favore della logica intuizionista e rinnovava la critica dei principi classici partendo da considerazioni riguardanti il significato e *l'uso* delle espressioni linguistiche. Inoltre, tracciava una serie di distinzioni molto fini, tra cui quella tra prove *canoniche* e prove non canoniche, volta a chiarire l'interpretazione delle clausole di BHK. Il fine di Dummett era costruire una teoria del significato basata sulla logica intuizionista e sul concetto di *verificazione*. Questo progetto era condiviso in gran parte anche

da Prawitz negli stessi anni ed è alla base della *proof-theoretic semantics* [18]. Queste ricerche influenzano la riflessione di Martin-Löf, che è portato a interrogarsi sulla relazione tra la teoria del significato e la sua teoria dei tipi.
Se nelle prime versioni della teoria dei tipi, la questione del significato delle espressioni rimane sullo sfondo, a partire dalla metà degli anni '70 questa assume un ruolo centrale nel pensiero di Martin-Löf. Il punto di svolta è il passaggio alla versione *estensionale* della teoria, esposta in (Martin-Löf, 1982) e (Martin-Löf, 1984), che è presentata insieme a una semantica operazionale pre-matematica che prende il nome di metodo delle *meaning explanations*. Queste clausole costituiscono, come vedremo, la semantica intesa della teoria dei tipi estensionale. Prima di tutto va ricordato che la teoria estensionale presenta regole diverse che hanno conseguenze importanti dal punto di vista metateorico.
Il pattern delle quattro regole standard per ogni tipo è arricchito da altre quattro regole, una per ognuna delle precedenti, che sono regole di congruenza riguardanti l'uguaglianza definizionale. Ad esempio, la regola di $\Pi - \mathbf{F}$ è accompagnata dalla regola che stabilisce $\Pi(x : A).B(x) \equiv \Pi(x : C).D(x)$, a partire dalle premesse $A \equiv C$ e $B(x) \equiv D(x)[x : A]$.
Va notato che la regola di congruenza associata alla regola di introduzione per $\Pi$ non è altro che la regola $\xi$ discussa in precedenza. Allo stesso modo, nella teoria estensionale Martin-Löf include anche le $\eta$-regole e quindi vengono reintrodotte le regole che erano state escluse in quanto non giustificate dall'analisi condotta in (Martin-Löf, 1975).
La modifica più significativa riguarda le regole per l'uguaglianza proposizionale: la regola di introduzione diventa la seguente

$$\frac{a \equiv b}{\mathbf{r} : Id_A(a, b)}$$

dove **r** è una nuova costante del linguaggio che *non* dipende dalle espressioni che appaiono nella premessa. Soprattutto, la regola di eliminazione è la cosiddetta *reflection rule*

$$\frac{c : Id_A(a, b)}{a \equiv b : A}$$

Con questa regola possiamo passare da una prova di un'uguaglianza proposizionale a un'uguaglianza definizionale, facendo collassare la distinzione tra le due nozioni.
Infine, la regola di computazione per il tipo $Id$ stabilisce che ogni prova di un'uguaglianza proposizionale è definizionalmente uguale ad **r**.
La modifica delle regole ha alcune conseguenze molto importanti:

i) non vale la normalizzazione, in quanto possiamo tipare termini non normalizzabili. Di conseguenza, anche il type-checking non è più decidibile.

ii) il principio dell'*estensionalità per funzioni* diventa dimostrabile. É il principio per cui date due funzioni $f, g$ se $f(x)$ e $g(x)$ sono uguali per ogni argomento $x$, allora le due funzioni sono uguali[19].

[18] Ottime introduzioni al pensiero di Dummett e a quello di Prawitz sono, rispettivamente, (Moriconi, 2012) e (Tranchini, 2014).

[19] Più formalmente, $\Pi(x : A)Id_{B(x)}(f(x), g(x)) \to Id_{\Pi(x:A).B(x))}(f, g)$.

Secondo Martin-Löf, il significato delle regole e la garanzia della loro correttezza è assicurato dal metodo delle già citate *meaning explanations*. Queste forniscono una semantica operazionale, pre-matematica ma *informalmente rigorosa*, per il sistema di Martin-Löf. L'idea di base è la valutazione di un'espressione *chiusa*, cioè non contenente variabili libere, alla *forma canonica* corrispondente. Più precisamente, un'espressione chiusa $\alpha$ è in forma canonica nei seguenti casi:

- se $\alpha$ è un tipo $A$, allora diciamo che è $A$ è un tipo canonico se sappiamo come formare elementi canonici di $A$ e sappiamo quando questi sono uguali.
- se $\alpha$ è un termine $t$ di tipo $B$, allora $t$ è un termine canonico se è dato tramite la regola di introduzione per $B$.

In generale, un termine $a : A$ è un metodo che, se eseguito, produce un termine canonico $v : A$ come risultato. Denotiamo questa relazione con $a \Downarrow v$ e ovviamente vale $v \Downarrow v$.
La centralità della distinzione tra prove canoniche e prove non canoniche, già sottolineata da Dummett, e la conseguente elaborazione delle *meaning explanations*, hanno conseguenze importanti sul sistema di Martin-Löf:

a) un termine in forma canonica non è necessariamente in forma normale. La procedure di valutazione assunta è detta *lazy evaluation* e consiste nel valutare le espressioni *dall'esterno*, guardando alla forma più esterna a sinistra. In sintesi, la computazione $a \Downarrow v$ termina appena riconsociamo $v$ come termine canonico del tipo considerato. Ad esempio, se $a$ è un termine di tipo $\mathbb{N}$ e $v$ ha la forma $s(b)$, concludiamo che $v$ è canonico, anche se $b$ non lo è. Oppure $\lambda x : A.b(x)$ è un termine canonico di tipo $\Pi(x : A).B(x)$, anche se la sottoespressione $b(x)$ contiene ulteriori redex. Insomma, la spiegazione non è più composizionale e non si richiede la valutazione completa di tutte le sottoespressioni di una certa espressione.

b) Possiamo definire tramite le regole della teoria estensionale termini non normalizzabili, ma se l'esecuzione di un termine porta ad un risultato, allora questo è in forma canonica. La computazione della forma canonica è ben-fondata, mentre quella della forma normale non lo è più.

Un giudizio categorico come $\vdash A$ sarà spiegato in questo modo: $A \Downarrow V$ dove $V$ è un tipo canonico e quindi c'è una regola di formazione corrispondente ( ad esempio, $V$ potrebbe essere $\mathbb{N}$).
La validità del giudizio $\vdash a : A$ sarà spiegata come segue: $A \Downarrow V$ e $a \Downarrow v$, dove $V, v$ sono espressioni canoniche. Quindi, ad esempio, $A \Downarrow \mathbb{N}$ e, di conseguenza, $a \Downarrow 0$ o $a \Downarrow s(m)$ per $m : \mathbb{N}$.
Un giudizio del tipo $\vdash A \equiv B$ è spiegato dal fatto che se riduciamo i tipi alla loro forma canonica, allora sappiamo come vengono generati i loro elementi canonici ( e lo stesso per l'uguaglianza tra questi termini). Dunque, la validità del giudizio sarà data dal fatto che $a : A$ se e solo se $a : B$.
Il caso dei giudizi ipotetici è più interessante: sia $\Gamma \vdash A$ un giudizio con $\Gamma \equiv x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$. Questo giudizio è valido se sostituendo espressioni chiuse $a_i$ di tipo $A_i$ per ogni variabile libera $x_i$, il giudizio categorico risulatante $\vdash A[a_i/x_i]$ è valido e inoltre per ogni $i$, $\vdash a_i : A_i$ è sempre valido.

Il punto importante è che la validità del giudizio ipotetico è ricondotta al caso della validità del giudizio categorico e quindi la spiegazione del significato di un'espressione aperta, contenente variabili libere, è ottenuta considerando opportune sostituzioni e dunque l'espressione chiusa corrispondente.
Su questo punto il metodo di Martin-Löf è molto vicino alla definizione di *validità* proposta da Prawitz nell'ambito della proof-theoretic semantics. In particolare, Martin-Löf condivide l'assunzione di base della *priorità* delle espressioni chiuse canoniche rispetto alle espressioni aperte e quindi la visione *sostituzionale* delle derivazioni aperte [20]. Come vedremo nella sezione successiva, la riflessione di Martin-Löf presenta anche punti in cui diverge fortemente dalla proposta teorica di Prawitz. Va notato che le *meaning explanations* convalidano regole, come quelle menzionate in precedenza, che erano assenti dalla teoria dei tipi intensionale e ciò giustifica il loro inserimento da parte di Martin-Löf nella teoria estensionale.
Infine, vanno commentati due aspetti collegati al metodo delle *meaning explanations* che hanno decisamente influenzato la ricezione successiva della teoria di Martin-Löf.
Martin-Löf introduce questo metodo per la prima volta nel lavoro (Martin-Löf, 1982). Come si evince già dal titolo, viene enfatizzato il legame tra matematica costruttiva e programmazione. Anzi, Martin-Löf si spinge fino a sostenere che attraverso la teoria dei tipi viene mostrato come in effetti questi due ambiti coincidano. Dunque, in quest'ottica, il carattere operazionale delle *meaning explanations* si rivela fondamentale: non solo permettono di convincersi della validità di un giudizio, ma, dato che nel linguaggio della teoria dei tipi costruire una prova corrisponde effettivamente a costruire un programma, allora permettono anche di verificare la correttezza del programma in questione. Inoltre, principi classici come il terzo escluso possono essere rifiutati perchè non hanno un significato computazionale chiaro: portano a programmi della forma $? : A \vee \neg A$, che non sempre sappiamo eseguire. Un esempio di proof-assistant ispirato da questa visione di Martin-Löf e basato sulla versione estensionale della teoria dei tipi è *Nuprl* (Constable et al., 1986).
L'altro punto che va sottolineato è che, sebbene le *meaning explanations* abbiano un carattere pre-matematico, questo non toglie che possano essere formalizzate e portare così a un modello della teoria in senso strettamente formale. In particolare, Stuart Allen (Allen, 1987) ha proposto una semantica della realizzabilità come controparte formale del metodo di Martin-Löf.

## 5. Significato, dimostrazioni e predicatività

La riflessione filosofica di Martin-Löf diventa più ricca e densa a partire dagli anni'80, come è testimoniato da una serie di lavori quali (Martin-Löf, 1987b),(Martin-Löf, 1991),(Martin-Löf, 1994),(Martin-Löf, 1996) e (Martin-Löf, 1998b). Il punto di partenza è senza dubbio la teoria del significato concepita costruttivamente e quindi il metodo delle *meaning explanations*. In generale, è facile notare come la riflessione sui principi di base della teoria dei tipi venga estesa da Martin-Löf a problematiche di natura filosofica più generale, che riguardano principalmente la filosofia della logica e della matematica. In particolare, Martin-Löf sviluppa una serie di distinzioni concettuali che gli consentono di rivisitare originalmente molti problemi classici.
Una delle idee più profonde dietro il metodo delle *meaning explanations* è costituita dal voler presentare la teoria dei tipi come un *linguaggio interpretato*.
Tradizionalmente, elaborare una semantica per una teoria *T* formulata in un dato linguaggio $\mathcal{L}_1$ comporta la costruzione di un modello per *T*, che avviene in un altro linguaggio $\mathcal{L}_2$. In

[20] Si veda Schroeder-Heister (2018) su quest'aspetto.

questo senso (vedi Martin-Löf (1987b)), la costruzione di un modello formale può essere vista come una traduzione da un linguaggio ad un altro, ma soprattutto può essere iterata e quindi possiamo dare un'interpretazione per $\mathcal{L}_2$, e così via, arrivando a una gerarchia di linguaggi. Per fermare la catena delle traduzioni, bisogna trovare un linguaggio che possa venir considerato fondamentale, le cui nozioni di base siano completamente analizzate e la giustificazione degli assiomi o delle regole di una teoria formulata in questo linguaggio non ha bisogno di rimandare ad altre costruzioni linguistiche esterne. Un linguaggio di questo genere sarà un *linguaggio interpretato*, cioè un linguaggio in cui non avremo più stringhe di segni sintattici che ricevono significato tramite una costruzione modellistica, ma oggetti sintattici dotati di significato. Secondo Martin-Löf, il linguaggio della teoria dei tipi è un esempio di linguaggio interpretato e le *meaning explanations* non fanno altro che esplicitare il significato delle espressioni dato dalle *regole* stesse della teoria e non da costruzioni metamatematiche.
Per Martin-Löf questo aspetto della teoria dei tipi non riguarda soltanto il piano semantico, ma fornisce anche un'intuizione chiara di cosa sono gli oggetti matematici. Un oggetto matematico è una *configurazione di segni dotata di significato* (Martin-Löf, 2008). Martin-Löf presenta questa concezione esplicitamente come una sorta di posizione intermedia tra il formalismo hilbertiano e l'intuizionismo di Brouwer, a testimonianza di come la riflessione di Hilbert (e Bernays) sui fondamenti abbia influenzato quest'autore fin dagli esordi con le *Notes on Constructive Mathematics* e poi in seguito con l'elaborazione della teoria dei tipi. Mentre è decisamente più ovvia l'influenza intuizionista.
Una delle distinzioni fondamentali elaborata da Martin-Löf e funzionale alla sua idea di costruire un linguaggio interpretato è quella tra proposizioni e giudizi.
Nei sistemi basati sull'isomorfismo Curry-Howard è comune presentare delle forme di giudizio che specifichino quali siano i tipi (ossia le proposizioni) e i termini del sistema. Sappiamo che la teoria dei tipi si inserisce proprio in questa linea, ma Martin-Löf non concepisce la coppia giudizio-proposizione semplicemente come un'utile distinzione per presentare calcoli formali tipati: per lui, questa distinzione è uno dei punti cardine della logica. Probabilmente, è per questo motivo che, in lavori come (Martin-Löf, 1996), dove la distinzione viene sistematicamente studiata, non c'è nessun riferimento ai calcoli tipati, come pure sarebbe ovvio, dato il contesto in cui è stata sviluppata. La distinzione giudizi-proposizioni è discussa da Martin-Löf con costante riferimento ad autori canonici della storia della logica, in particolare Frege. Il messaggio sembra essere che questa distinzione non è qualcosa che riguarda solo una particolare classe di sistemi formali, ma è concettualmente rilevante per la logica nella sua interezza.
Il concetto di proposizione è uno dei concetti semantici per eccellenza: una proposizione è l'entità astratta espressa da un enunciato. Secondo la ricostruzione presentata in (Martin-Löf, 1996), la riduzione formalistica del concetto di proposizione a quello di *formula* è stato uno dei grandi risultati della logica del '900. Il concetto di formula è puramente sintattico e può essere definito induttivamente. In particolare, la definizione induttiva delle formule è sempre relativa ad uno specifico linguaggio $\mathcal{L}$; quindi ciò che viene perso nella riduzione formalistica è il carattere *assoluto* delle proposizioni, cioè la non dipendenza da nessun linguaggio formale determinato.
Il problema, secondo Martin-Löf, è che le regole di inferenza spesso vengono interpretate come assolute e non relative ad un linguaggio, quindi ciò richiede che le espressioni che compaiono nelle premesse e nelle conclusioni siano interpretate ancora come proposizioni. Ne segue che la giustificazione della loro validità fa appello a condizioni semantiche. Ma se

vogliamo essere fedeli all'ideale del linguaggio interpretato 'autonomo', dobbiamo eliminare ogni riferimento a condizioni semantiche e, dunque, esprimere le regole in maniera puramente formale, dove una regola $\mathcal{R}$ è formale se non coinvolge condizioni semantiche. Proprio per realizzare quest'idea, è necessario tenere presente la distinzione tra giudizi e proposizioni.
Essenzialmente la soluzione di Martin-Löf consiste nell'aggiungere una nuova forma di giudizio oltre a quella che asserisce la verità di una proposizione. La forma in questione è '$\vdash A$ prop' (o type). Ne segue che le regole di formazione entrano a far parte del linguaggio della teoria e che le usuali regole per le costanti logiche saranno arricchite da questi giudizi, eliminando ogni riferimento a nozioni semantiche esterne al linguaggio e quindi diventando pienamente formali.
In generale, i giudizi sono ciò che compare nelle premesse e nelle conclusioni di un'inferenza, mentre le proposizioni sono gli oggetti dei giudizi, ciò su cui i giudizi vertono. Inoltre, il giudizio è un'unità fondamentale su cui non è possibile fare ulteriori operazioni e, soprattutto, a cui non possiamo applicare le costanti logiche. Quest'ultime infatti operano esclusivamente su proposizioni.
Un aspetto caratteristico dell'approccio di Martin-Löf alla filosofia della logica è il presentare le nozioni secondo un preciso *ordine concettuale*. Diciamo che un concetto $C_1$ precede un altro concetto $C_2$ o, analogamente, che $C_2$ dipende da $C_1$ se la definizione di $C_2$ contiene un riferimento essenziale a $C_1$, dove per 'essenziale' si intende non eliminabile. L'idea dell'esistenza di una relazione di dipendenza oggettiva tra i concetti sembra essere fortemente ispirata dalla filosofia di Bernard Bolzano (Van Wierst, 2016) e da tutta una tradizione ad essa collegata che arriva fino ad Husserl. Del resto, sempre in questa tradizione va ricercata l'origine della distinzione tra giudizi e proposizioni e, quindi, sembra lecito concludere che Martin-Löf cerca di recuperare e rinnovare una linea della filosofia della logica poi oscurata dal successo della tradizione che inizia con Frege e, ancora di più, con Russell. In quest'ultima, infatti, l'attenzione si focalizza soprattuto sul concetto di proposizione e sulla relazione di conseguenza logica tra queste, mentre il concetto di giudizio e di inferenza tra giudizi vengono messi in secondo piano, se non addirittura ritenuti superflui. La tavola dei concetti fondamentali proposta in (Martin-Löf, 1987b) e (Martin-Löf, 1991) è la seguente:

1. Proposizione;
2. Verità di una proposizione;
3. Giudizio;
4. Evidenza di un giudizio;
5. Correttezza o validità di una dimostrazione.

Si noti che l'ordine non è casuale, ma rispecchia fedelmente la relazione di priorità concettuale. Di fatto, 1) dipende concettualmente da 2), 2) da 3) e così via.
Una proposizione è compresa quando si comprendono le sue condizioni di verità: è questa la lettura classica. Per Martin-Löf, questa caratterizzazione si applica perfettamente anche al caso intuizionista, purchè si specifichi che in quel caso la nozione di verità è spiegata attraverso l'esistenza di una prova (canonica). Il concetto di esistenza che compare nella clausola intuizioniste non è quello catturato dal quantificatore esistenziale, ma è quello riscontrabile nella tradizione filosofica per cui un concetto ha esistenza se c'è un oggetto che cade sotto

quel concetto. Nella letteratura sulle teorie del significato neoverificazioniste si distingue solitamente tra verità attuale e verità potenziale. Una proposizione è attualmente vera se è stata dimostrata, mentre è potenzialmente vera se può essere dimostrata. La prima è una nozione temporale e dipendente da uno stato epistemico (possesso effettivo di una dimostrazione), mentre la seconda è una nozione atemporale e indipendente dalla conoscenza. Martin-Löf (1991) precisa che solo *localmente* è indipendente, ma non *in toto*: dire che una proposizione $P$ è potenzialmente vera equivale a dire $P$ *può essere attualmente vera*. Dunque, la nozione di attualità entra nella definizione di verità potenziale e, attraverso di essa, il riferimento alla conoscenza e alle condizioni di giustificazione. Quindi, possiamo concludere che la verità potenziale dipenda concettualmente dalla conoscenza, sebbene sia localmente indipendente da questa.

Sia riconoscere che una certa espressione è una proposizione sia riconoscere che questa proposizione sia vera sono giudizi e quindi siamo al punto (3) della tavola. Il concetto di giudizio si presenta in maniera ambigua: da un lato, è un atto, l'atto di giudicare qualcosa come vero per esempio, e dunque un atto di conoscenza; dall'altro è un oggetto e precisamente un oggetto di conoscenza, ad esempio conoscere un teorema significa conoscere un giudizio essenzialmente e dunque le condizioni sotto le quali è asseribile. Anche ai giudizi, inoltre, si applicano considerazioni riguardanti la possibilità e l'attualità. Martin-Löf classifica i giudizi in tre classi:

- $\mathcal{J}$ è logicamente possibile;
- $\mathcal{J}$ è realmente possibile;
- $\mathcal{J}$ è attuale.

La distinzione tra possibilità logica e *possibilità reale* è ripresa da Kant, sebbene sia già rintracciabile in alcuni autori della Scolastica.

Un giudizio è logicamente possibile non appena siano state definite le sue condizioni di asseribilità, cioè ciò che dobbiamo conoscere per poterlo asserire. In questo senso, presa una proposizione $A$ qualsiasi, il giudizio '$A$ è vera' è sempre logicamente possibile, perchè è perfettamente comprensibile, sebbene non siamo necessariamente in possesso della conoscenza per asserirlo. Un giudizio *realmente* possibile è un giudizio potenziale, cioè che può essere fatto, così come un giudizio attuale è un giudizio che è stato fatto.

In generale, possiamo dire che un giudizio è *evidente* o vero, ma la nozione di verità invocata in questo caso sarà sicuramente diversa da quella impiegata nel caso delle proposizioni. Infatti, secondo Martin-Löf, nel caso dei giudizi ogni nozione di verità come corrispondenza è destinata a fallire. Convincersi dell'evidenza di un giudizio significa esaminare la catena di inferenze di cui esso è conclusione e convincersi della *correttezza* di queste. Dunque, se una dimostrazione è una catena di inferenze e dunque di giudizi, la nozione più basilare sarà quella di correttezza o validità di una dimostrazione.

Il concetto di dimostrazione compare sia nella spiegazione della verità di una proposizione sia nella spiegazione dell'evidenza di un giudizio. Nel primo caso per dimostrazione si intende la *costruzione* che soddisfa la proposizione. La prova come *oggetto* che rende vera la proposizione e che quindi può essere interpretata come una sorta di *truth-maker*. Nel secondo caso, invece, una dimostrazione è un ragionamento che permette di muovere da un giudizio ad un altro preservando la validità. Quindi è sostanzialmente un *atto* di conoscenza. La distinzione tra *dimostrazioni come atti* e *dimostrazioni come oggetti* è una delle tesi fondamentali del pensiero di Martin-Löf.

L'altro aspetto interessante è che l'idea di verità potenziale e la concezione dei *proof-objects* delle proposizioni come *truth-makers* aprono a una sorta di ontologia delle prove con un forte orientamento realistico. Prawitz ha elaborato un punto di vista simile a quello di Martin-Löf, mentre molto più cauto è stato Dummett (Dummett, 1998). Del resto, questa idea non sembra essere del tutto in armonia con i principi di base di una semantica anti-realista ed è difficile valutare se possa essere accettata in questo quadro teorico senza snaturare completamente il progetto, come appunto temuto da Dummett. In ogni caso, questa tensione tra aspetti epistemologici e aspetti ontologici è tipica del pensiero di Martin-Löf di questa fase, che è segnata anche da numerosi ripensamenti.
Martin-Löf ha anche mostrato come la cornice concettuale esposta sopra offra strumenti che sono applicabili ad alcuni problemi ben noti e molto discussi della filosofia della logica e della matematica.
In (Martin-Löf, 1998b), Martin-Löf si propone di dimostrare come la sua distinzione tra giudizi e proposizioni offra una semplice soluzione al *paradosso di Fitch*, tradizionalmente ritenuto uno dei principali contro-argomenti rivolti a una semantica neoverificazionista (Fassio, 2013). L'analisi parte dal considerare due principi proposti da Dummett (Dummett, 1976) e che, secondo il filosofo inglese, ogni semantica in termini di verificazione o prova dovrebbe soddisfare:

(**C**) Se un enunciato è vero, allora deve esserci qualcosa in virtù della quale è vero.

(**K**) Se un enunciato è vero, deve essere possibile in linea di principio sapere che sia vero.

Il principio (**K**) è spesso presentato nella forma 'ogni verità è conoscibile'. Da una formalizzazione di questo principio, l'argomento di Fitch deriva la conclusione, chiaramente inaccettabile, per cui 'ogni verità è consociuta'.
Matin-Löf nota come il principio (**C**) nella sua generalità è perfettamente condivisibile sia in contesti classici che intuizionisti ed è immediatamente soddisfatto se intendiamo i *proof-objects* come *truth-makers*.
(**K**), invece, a giudizio di Martin-Löf, si presenta in una forma più sottile, perchè non è detto che le due occorrenze di 'vero' abbiano lo stesso significato. Infatti, la proposta di Martin-Löf è di modificare (**K**) come segue:

($\mathbf{K}^*$) Se il giudizio '$A$ è vera' è corretto, allora deve essere possibile sapere che $A$ sia vera.

L'occorrenza di 'vero' nell'antecedente va intesa come verità di un giudizio e non di una proposizione, e quindi in termini di *correttezza*. La nozione di giudizio è irriducibilmente epistemica, perchè è definita facendo riferimento al concetto di conoscenza. Infatti, conoscere un giudizio significa conoscere le condizioni sotto le quali possiamo asserirlo. Inoltre, anche la nozione di evidenza di un giudizio è caratterizzata come una nozione epistemica e quindi se un giudizio è evidente, allora può essere conosciuto. Quindi, il principio emendato ($\mathbf{K}^*$) non porta a conclusioni paradossali, proprio perchè concepito alla luce della distinzione tra proposizioni e giudizi.
Un altro esempio interessante della fecondità della distinzione tra proposizioni e giudizi si ha nel caso della questione dell'esistenza di proposizioni *assolutamente indecidibili*, che Martin-Löf affronta in (Martin-Löf, 2013). Gödel aveva posto il problema nelle *Gibbs Lectures* (Gödel, 1995), a partire dai suoi celebri teoremi di incompletezza.

Un modo di esporre il contenuto dei risultati di incompletezza consiste nell'affermare che le verità matematiche non coincidono con la derivabilità in un sistema formale. Gödel elabora una distinzione tra matematica oggettiva, cioè il corpus di quelle proposizioni matematiche che possono essere ritenute incondizionatamente vere o vere in senso assoluto, e matematica soggettiva[21], cioè l'insieme delle verità matematiche umananamente dimostrabili all'interno di un sistema assiomatico, e si chiede se questi due insiemi coincidano o meno.
Se coincidono, allora nessun sistema formale assiomatico può catturare le potenzialità matematiche della mente umana [22]; se non coincidono, allora esistono problemi assolutamente indecidibili, dove assolutamente indica che non sono tali soltanto rispetto a uno specifico sistema formale. La discussione di Gödel presenta molti punti da chiarire ed ha generato una letteratura molto vasta, anche per le presunte implicazioni concernenti la natura della mente umana [23]. L'analisi di Martin-Löf mira a dimostrare che, assumendo una lettura rigorosamente costruttiva delle nozioni coinvolte, si può concludere che non ci sono proposizioni assolutamente indecidibili. Il contesto in cui viene condotta la discussione è l'enunciazione di alcuni principi generali che governano i giudizi e la loro correttezza, che di fatto corrisponde alla loro conoscibilità. In particolare la seguente legge avrà come conseguenza una risposta negativa alla domanda sull'esistenza di proposizioni assolutamente indecidibili:

($*$) Se una proposizione non può essere riconosciuta come vera, allora può essere riconosciuta come falsa.

La nozione di falsità è caratterizzata in maniera intuitiva come:

$$\frac{A \text{ falsa}}{\neg A \text{ vera}}$$

Supponiamo che il giudizio '$A$ è vera' sia inconoscibile, situzione che indichiamo con 'A vera ?'. Il giudizio '$A$ vera' significa che esiste un termine $t$ tale che $t : A$. Ma se la verità di $A$ non può mai essere conosciuta, allora non possiamo mai trovarci di fronte a un tale $t$. Da qui possiamo ricavare la falsità di $A$. Infatti assumi che esista $g : A \to \bot$: allora dato $a : A$, abbiamo $g(a) : \bot$. E ciò è giustificato dal fatto che la situazione espressa nella premessa non può mai darsi e quindi è valido a vuoto. Dalla legge ($*$) si deriva facilmente che non possono esserci proposizioni assolutamente indecidibili, cioè non possiamo mai essere in una situazione in cui valgano contemporaneamente i tre giudizi '$A$ prop', '$A$ vera ?' e '$A$ falsa ?'. Infatti se il giudizio '$A$ è vera' non è conoscibile, ne segue per la legge esposta sopra che vale '$\neg A$ vera'. E lo stesso ragionamento applicato a '$A$ falsa ?', porta alla conclusione '$\neg A$ falsa' e dunque '$\neg\neg A$ vera'. Ma la conclusione va contro il principio di non contraddizione.
Del resto, tale conclusione è in perfetta sintonia con i presupposti teorici intuizionisti: infatti, Gödel stesso aveva osservato come per un intuizionista sia naturale optare per il primo dei due disgiunti e rifiutare il secondo.

[21] La scelta del termine 'soggettivo' da parte di Gödel non è felicissima, perchè potrebbe indurre a pensare che queste proposizioni non siano dotate di oggettività. In realtà, sono proposizioni matematiche completamente oggettive e 'soggettivo' va inteso in relazione alla capacità da parte di un soggetto umano di produrre una dimostrazione per esse. Sulla *disgiunzione di Gödel* si veda Beccuti (2018).

[22] Per Gödel un sistema assiomatico *ben-definito* è uno che può essere effettivamente presentato tramite una macchina di Turing. Dunque, se i due insiemi coincidono, esistono assiomi evidenti che non possono essere compresi tramite una regola finita, ma che vengono riconosciuti come tali dalla mente umana.

[23] Gödel (1995) si limita ad osservare che dai risultati di incompletezza possiamo derivare la tesi *disgiuntiva* esposta sopra, ma non uno dei due disgiunti.

## 6. Conclusioni

La riflessione e il lavoro di Martin-Löf hanno esercitato una notevole influenza negli ultimi decenni in aree diverse tra loro: dai fondamenti della matematica costruttiva alla teoria della dimostrazione, dalla filosofia del linguaggio e della logica all'informatica teorica. L'aspetto più sorprendente è sicuramente l'organicità e la profondità della sua riflessione, che hanno reso Martin-Löf una delle figure più originali del panorama della logica degli ultimi cinquant'anni.
Come è facile inferire dalla sezione precedente, la ricezione filosofica dell'opera di Martin-Löf si è focalizzata principalmente sui suoi contributi alla filosofia della logica e alla teoria del significato. In questo ambito, gli interlocutori privilegiati sono stati Dummett e Prawitz, che hanno approfondito le relazioni tra teoria della dimostrazione, logica intuizionistica e teoria del significato in lavori diventati classici come (Prawitz, 1971) e (Dummett, 1991). In particolare, dall'approccio di questi autori è derivato il programma di ricerca noto come *Proof-Theoretic Semantics* (vedi Piecha and Schroeder-Heister (2016) e Schroeder-Heister (2018)). Come abbiamo già sottolineato, sebbene ci siano punti di contatto indiscutibili tra l'approccio di Martin-Löf e quello di questi autori, non mancano però divergenze filosofiche importanti. Prawitz ha esplorato la questione in (Prawitz, 2012) ed è tornato su temi legati alla riflessione di Martin-Löf anche nel più recente (Prawitz, 2019). In particolare, la concezione ontologica dei *proof-objects* è stata al centro di un vivace dibattito, che ha coinvolto, oltre Prawitz e Martin-Löf, anche lo stesso Dummett (Dummett, 1998) e Göran Sundholm (Sundholm, 2000). Proprio quest'ultimo può essere considerato uno dei filosofi più vicini alla riflessione di Martin-Löf e ne ha esplorato le conseguenze in numerosi lavori, tra cui ricordiamo (Sundholm, 1983), (Sundholm, 1994b) e (Sundholm, 2012). Un esame complessivo della semantica neoverificazionista e dei contributi di Dummett, Prawitz e Martin-Löf è stato proposto in Usberti (1995).
Meno attenzione ha ricevuto il lavoro di Martin-Löf in filosofia della matematica, pur avendo esercitato un'influenza notevole negli studi fondazionali degli ultimi decenni. Rathjen (2009) approfondisce la portata filosofica dell'opera di Martin-Löf in questo ambito e discute le idee alla base della teoria dei tipi in relazione alla possibilità di un programma di Hilbert *costruttivo*. Martin-Löf stesso si è espresso negativamente su questa prospettiva in (Martin-Löf, 2008), parlando esplicitamente di un 'secondo fallimento' del programma di Hilbert, questa volta nella sua forma costruttiva. In ogni caso, siamo fermamente convinti del fatto che ci siano ancora molte questioni da approfondire su questo tema e che l'interazione tra tematiche fondazionali come trattate nella teoria dei tipi di Martin-Löf e filosofia della matematica meriti di essere ulteriormente sviluppata.
Altri lavori sulla filosofia di Martin-Löf con un taglio di tipo storico, soprattuto il primo, sono (Sommaruga, 2013) e (Granström, 2011).
A testimonianza di come alcune tematiche della riflessione di Martin-Löf siano ancora non ben sviluppate in ambito di filosofia della matematica, si può citare la concezione della predicatività che è propria della teoria intuizionista dei tipi. Infatti, in questo caso si parla di *predicatività generalizzata*, per distinguerla da altre nozioni di predicatività più deboli che si trovano in letteratura (Feferman, 2005). Laura Crosilla ha iniziato a studiare questo problema in alcuni recenti lavori, tra cui (Crosilla, 2022).
Il problema della predicatività risulta strettamente collegato alle definizioni induttive (Dybjer, 1994). Martin-Löf ha dato esempi anche di altri tipi di costruzioni, come le definizioni

*induttive-ricorsive* [24], che aumentano significativamente la forza espressiva della teoria dei tipi e che sono collegate a certi esempi di *large cardinals*, molto studiati in teoria degli insiemi. Un'utile panoramica sulla teoria della dimostrazione della teoria dei tipi di Martin-Löf con diversi tipi di costruzioni induttive è data in (Setzer, 2004).
Il lavoro di Martin-Löf è stato enormemente influente sia in matematica costruttiva che in certe aree dell'informatica teorica e, ovviamente, gran parte di questa influenza è collegata alla teoria dei tipi. Uno dei programmi di ricerca più discussi degli ultimi anni in logica ed informatica è scaturito dall'interpretazione *omotopica* della teoria dei tipi intensionale ed ha generato il settore noto come *homotopy type theory*(Univalent Foundations Program, 2013). L'osservazione alla base di questo progetto è che l'iterazione del tipo $Id$ che si ha nella versione intensionale della teoria di Martin-Löf dota ogni tipo della struttura di *weak higher groupoids*[25]. Sebbene il primo lavoro che proponeva un'interpretazione della teoria dei tipi nei gruppoidi risalisse agli anni '90 (Hofmann and Streicher, 1998), è solo con i lavori (Awodey and Warren, 2009) e (Voevodsky, 2006) che è stata realizzata l'importanza della connessione tra teoria dei tipi e teoria astratta dell'omotopia. In particolare, Vladimir Voevodsky ha proposto un nuovo assioma noto come *assioma di Univalenza*, che ha importanti conseguenze filosofiche e fondazionali, oltre che matematiche.
Il successo riscontrato dall'interpretazione omotopica della teoria dei tipi ha avuto come conseguenza un intensificarsi degli studi sulla relazione tra teoria dei tipi e teoria delle categorie. In realtà, la costruzione di modelli categoriali per la teoria di Martin-Löf risale almeno ai lavori di John Cartmell (Cartmell, 1986) e Robert Seely (Seely, 1984). Una panoramica introduttiva alle varie strutture categoriali usate in questo ambito si trova in (Hofmann, 1997).
Il legame tra teoria dei tipi e programmazione, enfatizzato in (Martin-Löf, 1982), è alla base di una delle più importanti applicazioni del sistema di Martin-Löf e cioè la costruzione dei *proof-assistant*. Oltre al già menzionato *Nuprl*, abbiamo anche *Coq*, basato su un sistema tipato noto come *Calcolo delle Costruzioni* (Coquand and Huet, 1988)(Paulin-Mohring, 1993), che costituisce un esempio di teoria impredicativa, e *Agda* (Norell, 2008), che invece si fonda su una teoria intensionale e predicativa. In Italia, invece, è stato sviluppato *Matita* (Asperti et al., 2011). I sistemi di dimostrazione assistita stanno avendo un ruolo sempre più importante nella ricerca matematica e, secondo diversi studiosi, in futuro faranno parte dell'attrezzatura di base di ogni matematico. La questione è interessante anche per le potenziali implicazioni epistemologiche.
Molte delle implementazioni della teoria dei tipi assumono la versione intensionale per le migliori proprietà computazionali e metateoriche. Allo stesso tempo, però, non si può non riconoscere che sviluppare parti di matematica in un contesto intensionale può essere estremamente complicato e lontano dalla pratica matematica usuale, che invece è più vicina al ragionamento formalizzato nella teoria estensionale. L'idea di coniugare entrambi i livelli in un unico sistema è alla base della *Minimalist Foundation*, proposta da Giovanni Sambin e Maria Emilia Maietti in (Maietti and Sambin, 2005) e poi pienamente sviluppata in (Maietti, 2009). Uno degli aspetti più interessanti di questo sistema, e che spiega l'aggettivo 'minimalista', è il suo essere *compatibile*, in un senso preciso, con i principali sistemi fondazionali esistenti, classici e intuizionisti. Per questo motivo risulta particolarmente adeguato come framework per le indagini fondazionali.

[24] Su questo punto vedi le sezioni 4.5 e 4.6 di Dybjer and Palmgren (2020) e la bibliografia lì citata.

[25] Si veda il libro già menzionato (Univalent Foundations Program, 2013) per un'introduzione a questi concetti.

Un aspetto che non abbiamo trattato è la teoria dei tipi *parziale*, sviluppata in (Martin-Löf, 1988). In effetti, sicuramente ha avuto meno influenza rispetto agli altri lavori menzionati, tuttavia è interessante per almeno due motivi: da un lato istituisce un legame con i domini di Scott (Martin-Löf, 1983), (Palmgren and Stoltenberg-Hansen, 1990), che sono un concetto fondamentale nello studio della semantica denotazionale dei linguaggi di programmazione; dall'altro consente di catturare la nozione di *sequenza di scelta libera*, tipica dell'intuizionismo brouweriano.
Infine, i lavori giovanili sulla *randomness* hanno avuto un'influenza notevole in seguito, come si può evincere dalle già citate introduzioni (Nies, 2009) e (Downey and Hirschfeldt, 2010).
Questa breve panoramica restituisce, almeno in parte, la varietà di settori influenzati dalla riflessione di Martin-Löf e la ricchezza di spunti e idee che è possibile trovare nella sua opera.
*Incomparable défricheur*: così Jean-Yves Girard ha definito Per Martin-Löf e, alla luce di quanto detto, sembra difficile trovare una conclusione migliore di questa.

## 7. Bibliografia

Bibliografia

Aczel, P. (1978). Type theoretic interpretation of constructive set theory. In *Logic Colloquium '77*, volume 96 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 55 – 66. Elsevier.

Allen, S. (1987). A non-type-theoretic definition of Martin-Löf's types. In *Proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS '87), Ithaca, New York, USA, June 22-25, 1987*, pages 215–221. IEEE Computer Society.

Asperti, A., Ricciotti, W., Coen, C. S., and Tassi, E. (2011). The Matita interactive theorem prover. In *International Conference on Automated Deduction*, pages 64–69. Springer.

Awodey, S. and Warren, M. A. (2007). Homotopy theoretic models of identity types. *arXiv preprint arXiv:0709.0248*.

Awodey, S. and Warren, M. A. (2009). Homotopy theoretic models of identity types. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 146(1):45–55.

Beccuti, F. (2018). La disgiunzione di Gödel. *APhEx*.

Berger, U. and Schwichtenberg, H. (1991). An inverse of the evaluation functional for typed lambda-calculus. In *Proceedings of the Sixth Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS '91), Amsterdam, The Netherlands, July 15-18, 1991*, pages 203–211. IEEE Computer Society.

Bishop, E. (1967). *Foundations of constructive analysis*, volume 60. McGraw-Hill.

Cartmell, J. (1986). Generalised algebraic theories and contextual categories. *Annals of pure and applied logic*, 32:209–243.

Constable, R. L., Allen, S. F., Bromley, M., Cleaveland, R., Cremer, J. F., Harper, R. W., Howe, D. J., Knoblock, T. B., Mendler, N. P., Panangaden, P., Sasaki, J. T., and Smith, S. F. (1986). *Implementing mathematics with the Nuprl proof development system*. Prentice Hall.

Coquand, T. (1986). An Analysis of Girard's Paradox. In *Proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS '86), Cambridge, Massachusetts, USA, June 16-18, 1986*, pages 227–236. IEEE Computer Society.

Coquand, T. (2019). Canonicity and normalization for dependent type theory. *Theor. Comput. Sci.*, 777:184–191.

Coquand, T. and Huet, G. (1988). The Calculus of Constructions. *Information And Computation*, 76(2-3):95–120.

Coquand, T. and Paulin, C. (1988). Inductively defined types. In *International Conference on Computer Logic*, pages 50–66. Springer.

Crosilla, L. (2016). Matematica costruttiva. *APhEx*.

Crosilla, L. (2022). Predicativity and Constructive Mathematics. In C., B. S. O. G. . T., editor, *Objects, Structures and Logics*. Springer.

De Bruijn, N. G. (1970). The mathematical language automath, its usage, and some of its extensions. In *Symposium on automatic demonstration*, pages 29–61. Springer.

Downey, R. G. and Hirschfeldt, D. R. (2010). *Algorithmic randomness and complexity*. Springer Science & Business Media.

Dummett, M. (1975). The philosophical basis of intuitionistic logic. In *Logic Colloquium '73*, volume 80 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 5 – 40. Elsevier.

Dummett, M. (1976). What is a theory of meaning? (ii). In Evans, G. and McDowell, J., editors, *Truth and Meaning: Essays in Semantics.* Oxford: Clarendon Press.

Dummett, M. (1991). *The logical basis of metaphysics*. Harvard university press.

Dummett, M. (1998). Truth from the constructive standpoint. *Theoria*, 64(2-3):122–138.

Dybjer, P. (1994). Inductive families. *Formal aspects of computing*, 6(4):440–465.

Dybjer, P. and Palmgren, E. (2020). Intuitionistic Type Theory. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer 2020 edition.

Fassio, D. (2013). Il paradosso della conoscibilità. *APhEx*.

Feferman, S. (2005). Predicativity. In *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, pages 590–624. Oxford: Oxford University Press.

Fenstad, J. E. (1971). *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, volume 2. North-Holland Publishing Company.

Girard, J.-Y. (1972). *Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur*. PhD thesis, Paris VII.

Gödel, K. (1995). Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications. In *Collected Works*, volume III, pages 304–323. Oxford University Press.

Granström, J. G. (2011). *Treatise on intuitionistic type theory*, volume 22. Springer Science & Business Media.

Hancock, P. and Martin-Löf, P. (1975). Syntax and semantics of the language of primitive recursive functions.

Hofmann, M. (1997). Syntax and semantics of dependent types. In *Extensional Constructs in Intensional Type Theory*, pages 13–54. Springer.

Hofmann, M. and Streicher, T. (1998). The groupoid interpretation of type theory. *Twenty-five years of constructive type theory (Venice, 1995)*, 36:83–111.

Howard, W. A. (1980). The formulae-as-types notion of construction. *To HB Curry: essays on combinatory logic, lambda calculus and formalism*, 44:479–490.

Kaposi, A. and Altenkirch, T. (2017). Normalisation by evaluation for type theory, in type theory. *Logical Methods in Computer Science*, 13.

Kreisel, G. (1966). Foundations of intuitionistic logic. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 44, pages 198–210. Elsevier.

Kreisel, G. (1967). Informal rigour and completeness proofs. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 47, pages 138–186. Elsevier.

Maietti, M. E. (2009). A minimalist two-level foundation for constructive mathematics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 160(3):319 – 354. Computation and Logic in the Real World: CiE 2007.

Maietti, M. E. and Sambin, G. (2005). Toward a minimalist foundation for constructive mathematics. In *From Sets and Types to Topology and Analysis: Practicable Foundations for Constructive Mathematics*, volume 48, pages 91–114. Oxford Logic Guides.

Martin-Löf, P. (1965). Probability theory on discrete semigroups. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 4(1):78–102.

Martin-Löf, P. (1966). The definition of random sequences. *Inf. Control.*, 9(6):602–619.

Martin-Löf, P. (1969). Algorithms and randomness. *Revue De l'Institut International De Statistique*, pages 265–272.

Martin-Löf, P. (1970). *Notes on Constructive Mathematics*. Stockholm, Almqvist & Wiksell.

Martin-Löf, P. (1971a). Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 63, pages 179–216. Elsevier.

Martin-Löf, P. (1971b). Hauptsatz for the theory of species. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 63, pages 217–233. Elsevier.

Martin-Löf, P. (1971c). A theory of types.

Martin-Löf, P. (1972). Infinite terms and a system of natural deduction. *Compositio Mathematica*, 24(1):93–103.

Martin-Löf, P. (1973). Hauptsatz for intuitionistic simple type theory. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 74, pages 279–290. Elsevier.

Martin-Löf, P. (1975). An intuitionistic theory of types: Predicative part. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 80, pages 73–118. Elsevier.

Martin-Löf, P. (1982). Constructive mathematics and computer programming. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 104, pages 153–175. Elsevier.

Martin-Löf, P. (1983). Unifying Scott's theory of domains for denotational semantics and intuitionistic type theory. In *Atti del congresso Logica e Filosofia della Scienza, Oggi, San Gimignano*, pages 7–11.

Martin-Löf, P. (1984). *Intuitionistic type theory*, volume 9. Bibliopolis.

Martin-Löf, P. (1987a). Philosophical implications of type theory. *Lectures given at the Facoltá de Lettere e Filosofia, Universitá degli Studi di Firenze, Florence, March*.

Martin-Löf, P. (1987b). Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof. *Synthese*, pages 407–420.

Martin-Löf, P. (1988). Mathematics of infinity. In *COLOG-88, International Conference on Computer Logic, Tallinn, USSR, December 1988, Proceedings*, volume 417 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 146–197. Springer.

Martin-Löf, P. (1991). A path from logic to metaphysics. In *Atti del Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza*, volume 2, pages 141–149. CLUEB.

Martin-Löf, P. (1992). Substitution calculus. *Notes from a lecture given in Göteborg*.

Martin-Löf, P. (1994). Analytic and synthetic judgements in type theory. In *Kant and contemporary epistemology*, pages 87–99. Springer.

Martin-Löf, P. (1996). On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws. *Nordic journal of philosophical logic*, 1(1):11–60.

Martin-Löf, P. (1998a). An intuitionistic theory of types. *Twenty-five years of constructive type theory*, 36:127–172.

Martin-Löf, P. (1998b). Truth and knowability: On the principles c and k of michael dummett. In *Truth in Mathematics*. Oxford.

Martin-Löf, P. (2001). A construction of the provable wellorderings of the theory of species. In *Logic, Meaning and Computation*, pages 343–351. Springer.

Martin-Löf, P. (2006). 100 years of Zermelo's Axiom of Choice: what was the problem with it? *Comput. J.*, 49(3):345–350.

Martin-Löf, P. (2008). The Hilbert-Brouwer controversy resolved? In *One hundred years of intuitionism (1907–2007)*, pages 243–256. Springer.

Martin-Löf, P. (2009). 100 years of zermelo's axiom of choice: what was the problem with it? In *Logicism, intuitionism, and formalism*, pages 209–219. Springer.

Martin-Löf, P. (2013). Verificationism then and now. In van der Schaar, M., editor, *Judgement and the Epistemic Foundation of Logic*, volume 31 of *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, pages 3–14. Springer.

Martin-Löf, P. (1975). About models for intuitionistic type theories and the notion of definitional equality. In *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium*, volume 82 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 81 – 109. Elsevier.

Moriconi, E. (2012). Michael Dummet. *APhEx*.

Nies, A. (2009). *Computability and randomness*, volume 51. OUP Oxford.

Norell, U. (2008). Dependently typed programming in agda. In *International school on advanced functional programming*, pages 230–266. Springer.

Palmgren, E. and Stoltenberg-Hansen, V. (1990). Domain interpretations of Martin-Löf's partial type theory. *Annals of Pure and Applied Logic*, 48(2):135–196.

Paulin-Mohring, C. (1993). Inductive definitions in the system coq rules and properties. In *International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications*, pages 328–345. Springer.

Piecha, T. and Schroeder-Heister, P. (2016). *Advances in proof-theoretic semantics*. Springer Nature.

Prawitz, D. (1971). Ideas and results in proof theory. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 63, pages 235–307. Elsevier.

Prawitz, D. (2006). *Natural deduction: A proof-theoretical study*. Courier Dover Publications.

Prawitz, D. (2012). Truth and proof in intuitionism. In *Epistemology versus ontology*, pages 45–67. Springer.

Prawitz, D. (2019). The seeming interdependence between the concepts of valid inference and proof. *Topoi*, 38(3):493–503.

Rathjen, M. (2009). The constructive hilbert program and the limits of martin-löf type theory. In *Logicism, Intuitionism, and Formalism*, pages 397–433. Springer.

Salerno, J. (2009). *New essays on the knowability paradox*. Oxford University Press.

Sambin, G. (1987). Intuitionistic formal spaces—a first communication. In *Mathematical logic and its Applications*, pages 187–204. Springer.

Schroeder-Heister, P. (2018). Proof-Theoretic Semantics. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Spring 2018 edition.

Scott, D. (1970). Constructive validity. In *Symposium on automatic demonstration*, pages 237–275. Springer.

Seely, R. A. (1984). Locally cartesian closed categories and type theory. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 95, pages 33–48. Cambridge University Press.

Setzer, A. (2004). Proof Theory of Martin-Löf Type Theory. An overview. *Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences*, 2(165).

Sommaruga, G. (2013). *History and philosophy of constructive type theory*, volume 290. Springer Science & Business Media.

Sørensen, M. H. and Urzyczyn, P. (2006). *Lectures on the Curry-Howard isomorphism*. Elsevier.

Sundholm, G. (1983). Constructions, proofs and the meaning of logical constants. *Journal of Philosophical Logic*, 12(2):151–172.

Sundholm, G. (1986). Proof theory and meaning. In *Handbook of philosophical logic*, pages 471–506. Springer.

Sundholm, G. (1994a). Existence, proof and truth-making: A perspective on the intuitionistic conception of truth. *Topoi*, 13(2):117–126.

Sundholm, G. (1994b). Vestiges of realism. In *The Philosophy of Michael Dummett*, pages 137–165. Springer.

Sundholm, G. (2000). Proofs as acts versus proofs as objects: Some questions for Dag Prawitz. *Theoria*, 64:187–216.

Sundholm, G. (2012). "Inference versus consequence" revisited: inference, consequence, conditional, implication. *Synthese*, 187(3):943–956.

Tait, W. W. (1967). Intensional interpretations of functionals of finite type I. *The journal of symbolic logic*, 32(2):198–212.

Tranchini, L. (2014). Dag Prawitz. *APhEx*.

Turing, A. M. (1937). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London mathematical society*, 2(1):230–265.

Univalent Foundations Program, T. (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. https://homotopytypetheory.org/book, Institute for Advanced Study.

Usberti, G. (1995). *Significato E Conoscenza. Per Una Critica Del Neoverificazionismo*. Guerini.

Van Wierst, P. (2016). Bernard Bolzano. *APhEx*.

Voevodsky, V. (2006). A very short note on the homotopy $\lambda$-calculus. Unpublished note.

**Appendice**

Le forme di giudizio fondamentali sono le seguenti:

$\mathcal{J}_1$) $\vdash \Gamma$ ctxt;

$\mathcal{J}_2$) $\vdash \Gamma \equiv \Delta$;

$\mathcal{J}_3$) $\Gamma \vdash A$ type;

$\mathcal{J}_4$) $\Gamma \vdash A \equiv B$;

$\mathcal{J}_5$) $\Gamma \vdash a : A$;

$\mathcal{J}_6$) $\Gamma \vdash a \equiv b : A$.

Abbiamo poi un gruppo di regole comprendente regole per la formazione dei contesti, regole strutturali e di sostituzione, regole per l'uguaglianza definizionale.

$$\frac{}{\vdash \epsilon \text{ ctxt}}\ \text{empty-ctxt} \qquad \frac{\Gamma \vdash x : A}{\vdash \Gamma, x : A \text{ ctxt}}\ \text{ext-ctxt}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, x : A \text{ ctxt}}{\Gamma \vdash x : A}\ \text{var} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma, x : A, \Delta \vdash b : B}{\Gamma, \Delta[a/x] \vdash b[a/x] : B[a/x]}\ \text{subst}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, \Delta \vdash b : B}{\Gamma, x : A, \Delta \vdash b : B}\ \text{weak} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv a : A}\ \text{refl}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A}{\Gamma \vdash b \equiv a : A}\ \text{sym} \qquad \frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \qquad \Gamma \vdash b \equiv c : A}{\Gamma \vdash a \equiv c : A}\ \text{trans}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash a : B}\ \text{typ-conv}_1$$

$$\frac{\Gamma \vdash a \equiv b : A \qquad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash a \equiv b : B}\ \text{typ-conv}_2$$

Le regole subst, weak e le regole dell'uguaglianza definizionale possono essere estese anche alle altre forme di giudizio.
Ogni costruttore di tipo ha quattro regole associate: formazione, introduzione, eliminazione e computazione.

$$\boxed{\Pi - type}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, x : A \vdash B}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B}\ \text{F} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.b : \Pi x : A.B}\ \text{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \Pi x : A.B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]}\ \text{E} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.b)(a) \equiv b[a/x] : B[a/x]}\ \text{C}$$

$$\boxed{\Sigma - type}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, x : A \vdash B}{\Gamma \vdash \Sigma x : A.B}\ \mathrm{F} \qquad \frac{\begin{array}{c} \Gamma, x : A \vdash B \\ \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B[a/x] \end{array}}{\Gamma \vdash (a,b) : \Sigma x : A.B}\ \mathrm{I}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, z : \Sigma x : A.B \vdash C \\ \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x,y)/z] \\ \Gamma \vdash c : \Sigma x : A.B \end{array}}{\Gamma \vdash R_\Sigma(c, [x,y].g) : C[c/z]}\ \mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{cc} \Gamma, z : \Sigma x : A.B \vdash C & \Gamma \vdash a : A \\ \Gamma, x : A, y : B \vdash g : C[(x,y)/z] & \Gamma \vdash b : B[a/x] \end{array}}{\Gamma \vdash R_\Sigma((a,b), [x,y].g) \equiv g[a/x, b/y] : C[(a,b)/z]}\ \mathrm{C}$$

$$\boxed{+ - type}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A + B}\ \mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash inl(a) : A + B}\ \mathrm{I}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash inr(b) : A + B}\ \mathrm{I}_2$$

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, z : A + B \vdash C \\ \Gamma \vdash c : A + B \\ \Gamma, x : A \vdash d : C[inl(x)/z] \\ \Gamma, y : B \vdash e : C[inr(y)/z] \end{array}}{\Gamma \vdash R_+(c, [x].d, [y].e) : C[c/z]}\ \mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, z : A + B \vdash C \\ \Gamma \vdash a : A \\ \Gamma, x : A \vdash d : C[inl(x)/z] \\ \Gamma, y : B \vdash e : C[inr(y)/z] \end{array}}{\Gamma \vdash R_+(inl(a), [x].d, [y].e) \equiv d[a/x] : C[inl(a)/z]}\ \mathrm{C}_1$$

Vi è una regola di computazione analoga, $\mathrm{C}_2$ che considera $b : B$ e dove quindi $R_+$ opera su $inr(b)$.

$$\boxed{N_k}$$

$$\frac{\vdash \Gamma\ \text{ctxt}}{\Gamma \vdash N_k}\ \mathrm{F} \qquad \frac{\vdash \Gamma\ \text{ctxt}}{\Gamma \vdash m_k : N_k\ (\text{con } m = 0, \ldots, k-1)}\ \mathrm{I}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : N_k \vdash C \\ \Gamma \vdash d_0 : C, \ldots, \Gamma \vdash d_{k-1} : C \\ \Gamma \vdash c : N_k\end{array}}{\Gamma \vdash R_k(c, d_0, \ldots, d_{k-1}) : C[c/z]}\ \mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : N_k \vdash C \\ \Gamma \vdash d_0 : C, \ldots, \Gamma \vdash d_{k-1} : C\end{array}}{\Gamma \vdash R_k(i_k, d_0, \ldots, d_{k-1}) \equiv d_i : C[i_k/z]}\ \mathrm{C}$$

$$\boxed{\mathbb{N}}$$

$$\frac{\vdash \Gamma \text{ ctxt}}{\Gamma \vdash \mathbb{N}}\ \mathrm{F} \qquad \frac{\vdash \Gamma \text{ ctxt}}{\Gamma \vdash 0 : \mathbb{N}}\ \mathrm{I}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash s(n) : \mathbb{N}}\ \mathrm{I}_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C \\ \Gamma \vdash d : C[0/x] \\ \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash e : C[s(x)/x] \\ \Gamma \vdash n : \mathbb{N}\end{array}}{\Gamma \vdash R_{\mathbb{N}}(n, d, [x, y].e) : C[n/x]}\ \mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : \mathbb{N} \vdash C \\ \Gamma \vdash d : C[0/x] \\ \Gamma, x : \mathbb{N}, y : C \vdash e : C[s(x)/x]\end{array}}{\Gamma \vdash R_{\mathbb{N}}(0, d, [x, y].e) \equiv d : C[0/x]}\ \mathrm{C}_1$$

La regola $\mathrm{C}_2$, invece, riguarda il caso del successore

$$\boxed{Id - type}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash Id_A(a, b)}\ \mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash refl(a) : Id_A(a, a)}\ \mathrm{I}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : A, y : A, p : Id_A(x, y) \vdash C \\ \Gamma, z : A \vdash c : C[z/x, z/y, refl(z)/p] \\ \Gamma \vdash a : A \\ \Gamma \vdash b : B \\ \Gamma \vdash q : Id_A(a, b)\end{array}}{\Gamma \vdash R_{Id}(a, b, q, [z].c) : C[a/x, b/y, q/p]}\ \mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : A, y : A, p : Id_A(x, y) \vdash C \\ \Gamma, z : A \vdash c : C[z/x, z/y, refl(z)/p] \\ \Gamma \vdash a : A\end{array}}{\Gamma \vdash R_{Id}(a, a, refl(a), [z].c) \equiv c[a/z] : C[a/x, a/y, refl(a)/p]}\ \mathrm{C}$$

La teoria estensionale si ottiene modificando le regole appena date nel seguente modo:

$$\boxed{Id - ext}$$

$$\frac{\Gamma \vdash c : Id_A(a, b)}{\Gamma \vdash a \equiv b : A}\ \mathrm{E} \qquad \frac{\Gamma \vdash c : Id_A(a, b)}{\Gamma \vdash c \equiv r : Id_A(a, b)}\ \mathrm{C}$$

$$\boxed{\mathcal{W} - type}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, x : A \vdash B}{\Gamma \vdash \mathcal{W}x : A.B}\ \mathrm{F} \qquad \frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash a : A \\ \Gamma \vdash f : B[a/x] \to \mathcal{W}x : A.B\end{array}}{\Gamma \vdash sup(a, f) : \mathcal{W}x : A.B}\ \mathrm{I}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : \mathcal{W}x : A.B \vdash C \\ \Gamma \vdash c : \mathcal{W}x : A.B \\ \Gamma, x : A, h : B \to \mathcal{W}x : A.B, k : \Pi y : B.C(h(y)) \vdash d : C[sup(x, h)/z]\end{array}}{\Gamma \vdash R_{\mathcal{W}}(c, [x, h, k].d) : C[c/z]}\ \mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : \mathcal{W}x : A.B \vdash C \\ \Gamma \vdash a : A \\ \Gamma \vdash f : B[a/x] \to \mathcal{W}x : A.B \\ \Gamma, x : A, h : B \to \mathcal{W}x : A.B, k : \Pi y : B.C(h(y)) \vdash d : C[sup(x, h)/z]\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma \vdash R_{\mathcal{W}}(sup(a, f), [x, h, k].d) \equiv \\ d(a, f, \lambda y.R_{\mathcal{W}}(f(y), [x, h, k].d) : C[sup(a, f)/z]\end{array}}\ \mathrm{C}$$

Infine, abbiamo le regole per l'universo $\mathcal{U}$. Se si adotta una formulazione alla Russell, non distinguendo tra tipi e loro codici, allora avremo le seguenti regole:

$$\frac{\vdash \Gamma\ \text{ctxt}}{\Gamma \vdash \mathcal{U}}\ \mathrm{F}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash A}\ \mathrm{F}_2$$

Le regole di introduzione saranno le regole di formazione dei tipi, così ad esempio avremo:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \qquad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B : \mathcal{U}}\ \mathrm{I}$$

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

Facilmente si possono ottenere le altre.
Nel caso di una formulazione alla Tarski distinguiamo tra tipi e codici e quindi abbiamo una funzione di decodifica $T$ definita ricorsivamente. In questo caso la seconda regola di formazione sarà:

$$\frac{\Gamma \vdash a : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash T(a) \text{ type}}$$

$T$ interviene anche nella definizione delle regole di introduzione per l'universo. Consideriamo di nuovo la regola del prodotto dipendente, questa diventa:

$$\frac{\Gamma \vdash a : \mathcal{U} \qquad \Gamma, x : T(a) \vdash b : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash \hat{\Pi} x : A.B : \mathcal{U}}\ \mathrm{I}$$

Possiamo introdurre, ripetendo lo stesso processo, un nuovo universo e iterare la procedura fino ad ottenere una gerarchia cumulativa $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2, \ldots$ .
Infine, ogni regola per formare tipi o termini è accompagnata da regole di congruenza che esprimono il fatto che l'uguaglianza definizionale venga preservata da ciascuna delle regole. Va osservato che includere o meno queste regole ha implicazioni teoriche non banali: ad esempio, la regola di congruenza associata alla regola di introduzione per il tipo $\Pi$ è precisamente la regola $\xi$, che abbiamo discusso in precedenza.
La teoria estensionale presenta anche le regole $\eta$, che possono essere comprese come principi di unicità.